Schéma en groupes fondamental et extension de torseurs

Marco Antei

N^{o} ordre :

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS

Par Marco ANTEI

SCHÉMA EN GROUPES FONDAMENTAL ET EXTENSION DE TORSEURS

Après avis des rapporteurs :

Parameswaran Aryampilly Jayanthan, Professeur	T.I.F.R., Mumbai
Vikraman Balaji, Professeur	Chennai Mathematical Institute
David Harari, Professeur	Université de Paris-Sud

Devant la commission d'examen formée de :

Parameswaran Aryampilly Jayanthan, Professeur	T.I.F.R., Mumbai
Vikraman Balaji, Professeur	Chennai Mathematical Institute
Arnaud Beauville, Professeur émérite	Université Nice Sophia Antipolis
Michel Emsalem, Professeur	Université Lille 1
David Harari, Professeur	Université de Paris-Sud
Christian Pauly, Professeur	Université Nice Sophia Antipolis
Carlos Simpson, Directeur de Recherche	Université Nice Sophia Antipolis

Soutenue le 14 Décembre 2015

Schéma en groupes fondamental et extension de torseurs

Marco Antei

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues du laboratoire Dieudonné, où j'ai été si chaleureusement accueilli.
Mes premiers remerciements vont à Christian Pauly, Carlos Simpson, Nicole Mestrano et Dajano Tossici (notre coordinateur extérieur) sans qui le projet ANR To.Fi.Grou. dont je suis responsable scientifique n'aurait pas été possible. En particulier je remercie Christian et Carlos de m'avoir constamment encouragé à progresser et oser dans mon travail.

Un remerciement particulier va à Michel Emsalem. Après avoir accepté, il y a douze ans, d'encadrer ma thèse de doctorat il m'a accompagné, pendant toutes les années qui ont suivi, dans mon parcours post doctorale. Il devra avouer qu'avec moi on s'ennuie rarement.

Je suis également reconnaissant envers Vikram Mehta, pour d'innombrables raisons. Son influence est souvent visible dans ce mémoire mais elle est encore plus grande qu'il n'y parait. Les mots sont bien faibles pour exprimer ma reconnaissance et son souvenir restera à jamais gravé dans ma mémoire.

Je suis très reconnaissant envers Indranil Biswas. Sa compétence et ses connaissances sans fin représentent pour moi une aide hors pairs.

Je remercie (sans les mentionner, j'en oublierais certainement) toutes les nombreuses institutions où j'ai travaillé ces cinq dernières années et les personnes qui ont contribué à rendre mon parcours de plus en plus stimulant.

Je remercie bien sûr Vikraman Balaji, David Harari et A.J. Parameswaran qui ont très gentiment accepté d'être rapporteurs de cette habilitation, ainsi que les membres du jury, dont Arnaud Beauville que je n'ai pas encore eu l'occasion de mentionner dans ce qui précède.

Enfin, dans un registre plus informel, je remercie ma famille pour son soutien inconditionnel, mes ami(e)s qui ne m'ont jamais quitté malgré les milliers de kilomètres qui nous ont séparés et bien sûr Tomer qui a tout abandonné pour suivre la folle vie d'un mathématicien errant.

Chapitre 1

Introduction

Le but de ce mémoire est de présenter les grandes lignes de mon travail dans les années qui ont suivi ma thèse de doctorat. J'ai choisi de regrouper mes travaux par thèmes falsifiant donc un peu l'ordre chronologique. La façon dont j'ai organisé ce mémoire laisse distinguer deux thèmes principaux, l'un concernant la théorie du schéma en groupes fondamental et l'autre concernant l'étude des modèles de schémas en groupes finis et de torseurs. Pour que ce mémoire ne devienne pas juste une froide description de mes travaux on placera chaque article dans un contexte plus ample. Ça nous permettra de rappeler, très succinctement, les définitions des objets principaux étudiés dans ces notes, en vous racontant leur histoire et leur *caprices*. Dans le reste de cette introduction, on va essayer d'expliquer brièvement les motivations des différents chapitres, ainsi que leurs interactions.

Le chapitre 2 est consacré à la théorie du schéma en groupes fondamental : la motivation essentielle était de comprendre ses liens avec le groupe fondamental étale dont il est une généralisation naturelle. Si beaucoup de propriétés satisfaites par le groupe fondamental étale sont satisfaites aussi par son successeur, introduit par Madhav Nori, il s'avère que, en caractéristique positive, certaines propriétés changent radicalement. On les rappellera, en précisant notre contribution. Un des résultat qui restera gravée à jamais dans l'histoire de la géométrie algébrique et arithmétique récente est certainement la *théorie de la spécialisation* du groupe fondamental étale. Celle-ci marque un lien très fort avec l'étude des modèles de torseurs, qui sera affronté au chapitre 3. Le schéma en groupes fondamental n'est pas la dernière généralisation du groupe fondamental étale. Il en existe en faite plusieurs et dans ce chapitre on s'occupera aussi d'un de ses *successeurs*, le S-schéma en groupes fondamental.

Dans le chapitre 3 on s'occupera plutôt d'étudier l'existence et les propriétés de certaines modèles d'objets donnés : une des premières questions que je me suis posée quand j'ai commencé mon doctorat était la suivante : soit X un schéma sur un anneau de valuation discrète R de corps des fractions $K := Frac(R)$ et soit X_η sa fibre générique ; on se donne un K-schéma en groupes fini G et un G-torseur Y au dessus de X_η. Existe-t-il un R-schéma en groupes fini et plat G' et un G'-torseur au dessus de X dont la fibre générique soit isomorphe au torseur donné :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, "G"'] & Y' \arrow[d, dashed, "G'"] \\
X_\eta \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\eta \arrow[r] & Spec(R).
\end{tikzcd}$$

Cette question est fortement liée à la théorie du schéma en groupes fondamental et en particulier à la possibilité d'une *théorie de la spécialisation* étendue au schéma en groupes fondamental. Cependant certaines techniques qui ont été utilisées pour aborder cette question ont acquis avec le temps une certaine indépendance et la question elle même a évoluée, souvent perdant de vue la motivation initiale. Le fort lien fera à nouveau son apparition dans une conjecture qui conclura ce mémoire. Ce qui n'a pas pu échapper au lecteur dans ces dernières lignes est que quand on cherche un modèle pour un G-torseur $Y \to X_\eta$ on doit obligatoirement trouver un modèle pour le schéma en groupes G. L'étude des modèles de G est une question d'intérêt indépendant : ici on s'occupera de certaines questions d'existence du produit amalgamé pour les différents modèles de G.

C'est inutile, à ce stade, d'ajouter les détails qui abonderont dans les prochaines sections. On conclue donc cette introduction en aidant le lecteur à retrouver la description de nos articles à l'intérieur de ce mémoire : à quelques exceptions près, ce qui est exposé ici est contenu dans les onze articles ci-dessous. Pour chaque article on rappellera, dans la liste (en ordre alphabétique) qui suit, l'endroit, dans ce mémoire, où il a été discuté :

[Ant09] *Comparison between the fundamental group scheme of a relative scheme and that of its generic fiber.*
Faisant partie de ma thèse de doctorat dans ce mémoire on a rappelé ce travail en quelques lignes dans §2.2.

[Ant13] *Extension of finite solvable torsors over a curve*
Il se trouve dans §3.2.4.

[Ant10] *On the abelian fundamental group scheme of a family of varieties.*
Il se trouve dans §2.3 et §3.2.3.

[Ant12] *Pushout of quasi-finite and flat group schemes over a Dedekind ring.*
Il se trouve dans §3.1.

[Ant11] *The fundamental group scheme of a non reduced scheme.*
Cet article contient quelques imperfections. On l'a donc inséré dans la liste des « questions ouvertes » relatives au Chapitre 2 où on explique comment développer son contenu. Plus précisément il se trouve dans §2.8.1.

[AntBi15] *On the fundamental group scheme of rationally chain connected varieties* (avec Indranil Biswas).
Il se trouve dans §2.5

[AntEm11] *Galois Closure of Essentially Finite Morphisms* (avec Michel Emsalem).
Il est contenu dans §2.7.1.

[AntEmGa15] *Sur l'existence du schéma en groupes fondametal*
Il est contenu dans §2.1.3.

[AntMe12] *On the Grothendieck-Lefschetz theorem for a family of varieties* (avec Vikram Mehta).
Il est contenu dans §2.4.

[AntMe13] *On the product formula for the S-fundamental group scheme* (avec Vikram Mehta).
Cet article, bien que complet, ne sera jamais soumis pour publication. Les raisons de ce choix, ainsi que l'article même, sont expliqués dans §2.6.

[AntMe11] *Vector bundles over normal varieties trivialized by finite morphisms* (avec Vikram Mehta).
Il est contenu dans §2.7.2.

Il est certainement utile de rappeler que les articles [AntMe13] et [AntEmGa15] ne seront pas présentés aux membres du jury parce que le premier ne sera jamais soumis alors que le deuxième n'est pas encore publié. Pour une discussion complète de nos efforts il nous a paru néanmoins plus intéressant de les inclure dans ce mémoire, surtout [AntEmGa15], qui corrige une faute qui se trouve dans [Gas03] et donc complète pas mal de travaux présentés dans ce mémoire qui citent [Gas03]. L'article

[Ant13] M. Antei, *Extension of finite solvable torsors over a curve*

se base essentiellement sur un travail (voir [Gar09]) dont la preuve a récemment été mise en discussion. En attendant une correction par son auteur on présentera l'article en donnant juste quelques détails sur les techniques utilisées.

Une dernière précision est essentielle : la longueur du texte consacré ici aux résultats de chacun des articles ci-dessus est très loin de refléter leur importance ou leur intérêt relatif. Elle n'est que le résultat du choix de certains points particuliers que j'ai pensé utile de détailler, ou de la prédominance de mes sujets de réflexion du moment.

Chapitre 2

Schéma en groupes fondamental

Dans [SGA1] Alexander Grothendieck construit le groupe fondamental étale $\pi^{\text{ét}}(X,\overline{x})$ d'un schéma X, muni d'un point géométrique $\overline{x} : Spec(\Omega) \to X$. C'est un groupe pro-fini classifiant les revêtements étales au dessus de X. Grothendieck élabore pour $\pi^{\text{ét}}(X,\overline{x})$ une théorie de la spécialisation ([SGA1], Chapitre X) dont il n'est visiblement pas entièrement satisfait. C'est en effet à la fin de son dixième chapitre qu'il dit

« *Une théorie satisfaisante de la spécialisation du groupe fondamental doit tenir compte de la "composante continue" du "vrai" groupe fondamental, correspondant à la classification des revêtements principaux de groupe structural des groupes infinitésimaux ; moyennant quoi on serait en droit à s'attendre que les "vrais" groupes fondamentaux des fibres géométriques d'un morphisme lisse et propre $f : X \to Y$ forment un joli système local sur X, limite projective de schémas en groupes finis et plats sur X.* »

Bien que dans une note en bas de la même page il nous informe que

« *Cette conjecture extrêmement séduisante est malheureusement mise en défaut par un exemple inédit de M. Artin, déjà lorsque les fibres de f sont des courbes algébriques de genre donné $g \geq 2$* »

la question de construire un "vrai" groupe fondamental reste très intéressante. Ce n'est qu'en fin des années '70 que Madhav Nori, dans sa thèse de doctorat (voir [No76] et [No82]), le construit en l'appelant "the fundamental group scheme" (schéma en groupes fondamental). Il sera à nouveau appelé "the true fundamental group" dans [DeMi82] mais, à notre connaissance, ce sera la dernière fois. Dans les sections qui suivent on expliquera de quoi il s'agit.

2.1 Construction

Dans cette section préambule on rappellera très rapidement les notions de torseur, catégorie tannakienne, réseau tannakien et catégorie cofiltrée. Tout ceci sera indispensable pour comprendre les constructions du schéma en groupes fondamental qui seront données aux sections 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.4. Il existe plusieurs définitions différentes de torseurs et un bon guide pour mieux comprendre différences et équivalences entre ces définitions est certainement [Vi05], §4.4. Soient S un schéma quelconque, X et Y deux S-schémas et G un S-schéma en groupes affine plat. Pour nous *un torseur pour la topologie fpqc* ou *un torseur* (tout-court) est la donnée d'une action (à droite) $Y \times_S G \to Y$, d'une action triviale $X \times_S G \to X$ et d'un S-morphisme affine et fidèlement plat $f : Y \to X$, G-équivariant tel que le morphisme canonique $Y \times_S G \to Y \times_X Y$ est un isomorphisme.

La notion de catégorie tannakienne neutre mérite quelques mots de plus. On ne rappellera pas la définition complète (qui est très longue et qui se trouve par exemple dans [De90], [DeMi82] et [Sz09]) mais on donnera néanmoins une description suffisamment claire pour comprendre la suite : soit k un corps quelconque, une catégorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1_{\mathcal{C}}, \omega)$ est tannakienne si $\mathcal{C}$ est une catégorie k-linéaire, abélienne, monoïdale, rigide (donc symétrique) de produit tensoriel $\otimes$ munie d'un objet unité $1_{\mathcal{C}}$ satisfaisant à la propriété $End(1_{\mathcal{C}}) = k$ et d'un foncteur fibre $\omega : \mathcal{C} \to k\text{-}mod$. Ce dont il faut se souvenir est que si k un corps et G un k-schéma en groupes affine, alors la catégorie des k-représentations linéaires finies de G, munie du foncteur oubli est une catégorie tannakienne neutre sur k (le produit tensoriel de représentations se définit de façon naturelle et l'objet trivial est la représentation triviale). Mais, ce qui est encore plus important et plus étonnant, toute catégorie tannakienne neutre sur k est équivalente à la catégorie des k-représentations linéaires finies d'un certain k-schéma en groupes affine G : celui-ci coïncide avec le foncteur en groupes des automorphismes tensoriels du foncteur fibre ω, qui s'avère être représentable. L'équivalence *torseurs-foncteurs fibres* mérite elle aussi d'être mentionnée, ne serait-ce que parce qu'on l'utilisera dans la suite : soit k un corps, $p : S \to Spec(k)$ un schéma et $Fib_S(\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs fibres $\mathcal{C} \to Qcoh(S)$. Soit G-Tors$_S$ la catégorie des G-torseurs (à droite) au dessus de S. On rappelle le résultat fondamental suivant ([DeMi82], Theorem 3.2 and [De90] §3) :

Théorème 2.1.1. *Le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} Fib_S(\mathcal{C}) & \to & G\text{-}Tors_S \\ \eta & \mapsto & \underline{Isom}_S^{\otimes}(p^* \circ \gamma, \eta) \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

On introduit maintenant la notion "relative" de catégorie tannakienne. Il s'agit d'une construction tannakienne où l'anneau de base n'est plus un corps mais un anneau de Prüfer R. Cette construction est due à Wedhorn et se trouve dans [We04]. On ne parlera plus de *catégorie tannakienne* mais de *réseau tannakien* (ou *quasi-tannakien* selon les propriétés satisfaites). On rappelle l'essentiel mais pour simplifier la description de ces objets on ne considère ici que le cas où R est un anneau de valuation discrète complet, ou bien la clôture intégrale d'un anneau de valuation discrète complet dans la clôture algébrique de $Frac(R)$. Ce sera le seul cas qu'on rencontrera dans la suite. Soit donc R comme ci-dessus et soient K et k respectivement son corps des fractions et son corps résiduel. Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \otimes, 1_{\mathcal{T}})$ une catégorie additive, monoïdale, rigide (donc symétrique) de produit tensoriel $\otimes$ munie d'un objet unité $1_{\mathcal{T}}$ satisfaisant à la propriété $End(1_{\mathcal{T}}) = R$ qui munit $\mathcal{T}$ d'une structure de catégorie R-linéaire. Supposons aussi que $\mathcal{T}$ soit munie d'un foncteur fibre $\omega : \mathcal{T} \to R\text{-}mod$. On définit la catégorie K-linéaire $\mathcal{T}_K$ suivante (cf.

[We04], (3.4)) : les objets de $\mathcal{T}_K$ sont exactement les objets de $\mathcal{T}$ alors que pour deux objets quelconques M, N de $\mathcal{T}_K$ on définit

$$Hom_{\mathcal{T}_K}(M,N) := Hom_{\mathcal{T}}(M,N) \otimes_R K. \tag{2.1}$$

Soit $\omega : \mathcal{T} \to R-mod$ un foncteur tensoriel R-linéaire alors ω prend ses valeurs dans la catégorie des R-modules libres de rang fini (cf. [We04], (1.4)). Il induit un foncteur tensoriel K-linéaire $\omega_K : \mathcal{T}_K \to K-mod$ (prend ses valeurs dans la catégorie des K-espaces vectoriels finis) qui est fidèle si et seulement si ω l'est (cf. [We04], (6.5)). Les catégories qu'ont construira auront peu de chances d'être abéliennes, on se demandera cependant si elles peuvent être au moins pseudo abéliennes. Rappelons ce que ça veut dire :

Définition 2.1.2. Une catégorie additive $\mathcal{A}$ est appelée pseudo-abélienne si pour tout objet A de $\mathcal{A}$ tout morphisme idempotent $p : A \to A$ (c'est à dire $p \circ p = p$) a un noyau (ou, ce qui revient au même, un conoyau).

Définition 2.1.3. Soit $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \otimes, 1_{\mathcal{T}}, \omega)$ une catégorie additive, monoïdale, rigide (donc symétrique) de produit tensoriel $\otimes$ munie d'un objet unité $1_{\mathcal{T}}$ satisfaisant à la propriété $End(1_{\mathcal{T}}) = R$ et munie d'un foncteur fibre $\omega : \mathcal{T} \to R\text{-}mod$. On dira que $\mathcal{T}$ est un réseau quasi-tannakien ("quasi-Tannakian lattice" en Anglais) sur R si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (TL2) $\mathcal{T}_K$ munie de la structure monoïdale induite est une catégorie abélienne monoïdale rigide (symétrique) et ω_K est exact.
- (TL3) Soit L/K une extension finie quelconque et soit R_L la clôture intégrale de R dans L. Pour tout R_L ainsi obtenu l'injection (cf. [We04], (6.8.1))

$$Hom_{\mathcal{T}}(M,N) \hookrightarrow Hom_{R-mod}(\omega(M), \omega(N)) \tag{2.2}$$

  rend $Hom_{\mathcal{T}}(M,N) \otimes_R R_L$ un R_L-facteur direct de

$$Hom_{R_L-mod}(\omega(M) \otimes_R R_L, \omega(N) \otimes_R R_L).$$

Sous ces hypothèses ω est appelé foncteur fibre de $\mathcal{T}$. Un réseau quasi-tannakien $\mathcal{T}$ est appelé réseau tannakien si de plus $\mathcal{T}$ est une catégorie pseudo-abélienne.

On oublie les catégories tensorielles pour un instant et on conclut cette section, comme déjà annoncé, en rappelant la notion de catégorie cofiltrée : une catégorie $\mathcal{C}$ est cofiltrée si elle est non vide et les deux axiomes suivants sont satisfaits :

1. pour toute paire d'objets A, B de $\mathcal{C}$ il existe un objet C de $\mathcal{C}$ et deux morphismes $c_A : C \to A$ et $c_B : C \to B$;
2. pour toute paire d'objets A, B et toute paire de morphismes $c_1 : A \to B$ et $c_2 : A \to B$ il existe un objet U de $\mathcal{C}$ et un morphisme $u : U \to A$ tel que $c_1 \circ u = c_2 \circ u$.

On observe pour finir que si la catégorie $\mathcal{C}$ a un objet final et si pour tout triplet d'objets A, B, C et toute paire de morphismes $f : A \to C$ et $g : B \to C$ il existe, dans $\mathcal{C}$, le produit fibré $A \times_C B$ alors la catégorie $\mathcal{C}$ est cofiltrée. Les détails de cette petite astuce sont un joli exercice.

2.1.1 Description tannakienne

Pour cette description les articles de référence restent sans doute [No76] et [No82] (ce dernier étant la thèse de doctorat de Nori, contient strictement [No76]), mais aussi

[Sz09]. Soit donc k un corps quelconque, X un schéma connexe et réduit, propre sur $Spec(k)$, muni d'un point k-rationnel tel que $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ (cette dernière condition remplace la condition plus restrictive *k corps parfait* contenue dans [No76] et [No82] qui ne sert, d'ailleurs, qu'à montrer que $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$). Un fibré vectoriel V sur X est dit *fini* s'il existe deux polynômes distincts f et g à coefficients entiers positifs tels que $f(V) \simeq g(V)$, où, dans l'évaluation des polynômes, on a remplacé somme par somme directe et produit par produit tensoriel. Or, soit C une courbe propre et lisse sur k et W un fibré sur C. Alors W est dit *semi-stable de degré* 0 si $deg(W) = 0$ et pour tout sous-fibré $U \subset W$ on a $deg(U) \leq 0$.

Définition 2.1.4. Un fibré V sur X est dit Nori semi-stable si pour toute courbe C propre et lisse sur k et tout morphisme $j : C \to X$ le fibré $j^*(V)$ est semi-stable de degré 0.

Si la caractéristique de k est nulle il s'avère que la catégorie des fibré finis est une catégorie abélienne et devient même tannakienne (neutre sur k) si on la munit de l'objet trivial $\mathcal{O}_X$, du produit tensoriel de fibrés $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ et du foncteur fibre x^* ($x : Spec(k) \to X$ étant le point rationnel de X fixé en début de cette section). Tout ça n'est pas possible en caractéristique positive et c'est pourquoi Nori a introduit la Définition 2.1.4 : l'intuition de Nori a été celle de considérer l'enveloppe abélienne de la catégorie des fibrés finis dans la catégorie (abélienne) des fibrés Nori semi-stables : il s'agit la sous-catégorie pleine de la catégorie des fibrés Nori semi-stables engendrée par les fibrés finis, leur duaux et toutes les sommes directe finis de tous les produits tensoriels entre iceux. Les objets de $EF(X)$ sont appelés *fibrés essentiellement finis*. On résume les résultats de Nori dans le théorème suivant :

Théorème 2.1.5. *La catégorie $EF(X)$ des fibrés essentiellement finis munie de l'objet trivial $\mathcal{O}_X$, du produit tensoriel de fibrés $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ et du foncteur fibre x^* est une catégorie tannakienne neutre sur k.*

Le k-schéma en groupes affine $\pi(X, x)$ associé à $EF(X)$ est le *schéma en groupes fondamental*. Au moyen de l'équivalence donnée au Théorème 2.1.1 on peut aisément obtenir un $\pi(X, x)$-torseur qui sera appelé le *$\pi(X, x)$-torseur universel*. Si on note par $p : X \to Spec(k)$ le morphisme structural de X et par $i : EF(X) \to Qcoh(X)$ le foncteur "inclusion", alors il s'agit du torseur donné par $\underline{Isom}^{\otimes}_X(p^* \circ x^*, i)$. Lorsque X est un schéma défini sur un corps k algébriquement clos alors le groupe des points k-rationnels $\pi(X, x)(k)$ coïncide avec le groupe fondamental étale $\pi^{\text{ét}}(X, x)$. Si en revanche k n'est plus algébriquement clos mais il est de caractéristique nulle alors le schéma en groupes fondamental n'est rien d'autre que $\pi^{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \overline{x})$ muni de l'action de $Gal(\overline{k}/k)$ sur $\pi^{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \overline{x})$ donnée par le point rationnel $x \in X(k)$. Il est donc clair que le cas le plus intéressant est celui où k a caractéristique positive. Une description plus explicite sera rappelée dans §2.1.2.

2.1.2 Description comme limite pro-finie : le cas d'un corps

La deuxième construction du schéma en groupes fondamental est contenue dans [No82]. Soit donc X un schéma connexe et réduit sur un corps quelconque k et soit $x \in X(k)$ un point k-rationnel. On considère la catégorie $\mathcal{P}(X)$ des torseurs pointés où les objets sont les torseurs finis au dessus de X, pointés au dessus de x et les morphismes entre de tels torseurs sont morphismes de schémas qui commutent aux actions des schémas en groupes et qui envoient le point fixé du premier torseur dans le point fixé du deuxième torseur. On écrira (Y, G, y) pour un G-torseur $Y \to X$ pointé en y. Nori montre donc que

Théorème 2.1.6. *Soit X un schéma connexe et réduit sur un corps quelconque k et soit $x \in X(k)$ un point k-rationnel. La catégorie $\mathcal{P}(X)$ est cofiltrée.*

Démonstration. La stratégie est la suivante : on prend trois objets de $\mathcal{P}(X)$ quelconques $(Y_i, G_i, y_i), i = 0, ..., 2$ et deux morphismes comme dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(Y_1, G_1, y_1) \arrow[dr] & & (Y_2, G_2, y_2) \arrow[dl] \\
& (Y_0, G_0, y_0) &
\end{tikzcd}$$

dans le préambule de la section 2.1 on remarquait qu'il est suffisant de démontrer que le produit fibré $(Y_1 \times_{Y_0} Y_2, G_1 \times_{G_0} G_2, y_1 \times_{y_0} y_2)$ est lui aussi un objet de $\mathcal{P}(X)$. Ce n'est pas trivial de démontrer que $Y_1 \times_{Y_0} Y_2$ est fidèlement plat sur X et c'est ici qu'on fait intervenir les hypothèses sur X, qu'on a supposé réduit et connexe. $\square$

Les morphismes entre les torseurs pointés étant affines on peut construire la limite projective de tous les objets de $\mathcal{P}(X)$, donnant lieu à un triplet $(\tilde{X}, \pi(X, x), \tilde{x})$; le k-schéma en groupes $\pi(X, x)$ sera encore appelé schéma en groupes fondamental et $\tilde{X}$ le $\pi(X, x)$-torseur universel (pointé en $\tilde{x}$).

Remarque 2.1.7. Soient k un corps quelconque, X un schéma connexe et réduit, propre sur $Spec(k)$, muni d'un point k-rationnel tel que $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ alors la construction tannakienne présentée dans §2.1.1 et la construction donnée par le Théorème 2.1.6 donnent lieu aux mêmes schémas en groupes fondamentaux et aux mêmes torseurs universels.

Remarque 2.1.8. Dans [Zh13], Zhang a montré, à travers des contre-exemples que si une des hypothèses sur X, *réduit, connexe, pointé* tombe alors la catégorie des torseurs finis qu'on construit n'est plus cofiltrée. De plus, dans [BoVi], Niels Borne et Angelo Vistoli donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un schéma X sur un corps admette l'existence d'un schéma en groupes fondamental.

Par conséquent on va, dans ce cas aussi, construire la limite projective de tous les objets de $\mathcal{P}(X)$, obtenant un triplet $(\tilde{X}, \pi(X, x), \tilde{x})$; le S-schéma en groupes $\pi(X, x)$ sera encore appelé schéma en groupes fondamental et $\tilde{X}$ le $\pi(X, x)$-torseur universel (pointé en $\tilde{x}$).

2.1.3 Description comme limite pro(-quasi)-finie : le cas d'un schéma de Dedekind

Comme on a rappelé dans l'introduction, la possibilité de construire un schéma en groupes classifiant les torseurs finis au dessus d'un schéma X défini sur une base quelconque S avait déjà été considérée par Grothendieck. Un tel schéma en groupes s'appellera encore *schéma en groupes fondamental.* Jusqu'ici on a présenté le cas où S est le spectre d'un corps. Le cas S régulier de dimension quelconque a été étudié par l'auteur de ces notes dans [Ant15], où une solution partielle est proposée, mais une description complète de tel travail irait au-delà du but de ce texte. Nous nous concentrons donc sur le cas où S est un schéma de Dedekind, c'est à dire un schéma normal, noethérian et de dimension ≤ 1. Comme le cas $dim(S) = 0$ se trouve dans la §2.1.2, on ne considère dans cette section que le cas où $dim(S) = 1$. Carlo Gasbarri dans [Gas03] a proposé une première approche pour répondre aux attentes de Grothendieck ; malheureusement dans la preuve du Lemma 2.2 de son article il y a une faute qui a été corrigée par Emsalem, Gasbarri et moi même (dans [AntEmGa15]) seulement 12 ans plus tard. Vue l'importance de ce résultat, utilisé dans beaucoup de travaux présentés dans cette habilitation, on en rappellera ici les grandes lignes bien qu'il s'agisse d'un article soumis et pas encore publié. Et c'est aussi pour cette raison qu'on esquissera la preuve d'un cas particulier plus simple que le autres pour satisfaire le lecteur le plus assoiffé de détails. Comme dans le cas précédent on part de la catégorie $\mathcal{P}(X)$ des torseurs finis au dessus de X pointés au dessus d'un point fixé $x \in X(S)$. On énonce le résultat suivant :

Théorème 2.1.9. *Soit X un schéma connexe, fidèlement plat au dessus d'un schéma de Dedekind S $x \in X(S)$ un point. On suppose de plus que une des hypothèses suivantes soit satisfaite :*

a) pour tout $s \in S$ la fibre X_s est réduite et soit,

b) pour tout point $x \in X \setminus X_\eta$, l'anneau local $\mathcal{O}_x$ est intégralement clos.

Alors la catégorie $\mathcal{P}(X)$ est cofiltrée.

On a déja expliqué comment cela entraîne l'existence d'un S-schéma en groupes $\pi(X, x)$ pro-fini et d'un $\pi(X, x)$-torseur universel sur X pointé au dessus de x, limite projective de tous les torseurs finis pointés au dessus de x.

Comme il a déjà été annoncé on esquisse la preuve mais uniquement pour le point a) et seulement dans le cas où S est un trait, à savoir le spectre d'un anneau de valuation discrète, les autres cas demandant plus de soin (et pour lesquels on renvoie à [AntEmGa15]). Pour ce cas particulier le point crucial de la preuve est représenté par le lemme suivant.

Lemme 2.1.10. *Soit S un trait de point générique $\eta = Spec(K)$ et G un schéma en groupes fini et plat sur S. Soit $H \hookrightarrow G$ un sous-schéma en groupes. Soit $X \to S$ un S–schéma fidèlement plat tel que pour tout $s \in S$ la fibre X_s est réduite et irreductible. Soit $P \to X$ un G–torseur et $Y \subset P_\eta$ un sous-schéma fermé qui est un H_η-torseur. Alors la clôture de Zariski $\overline{Y}$ de Y dans P est un H-torseur.*

Démonstration. D'après [EGA IV.2] (2.8.3) il existe une action $\overline{Y} \times_S \overline{H} \to \overline{Y}$ compatible avec l'action de G sur P. Donc en particulier le morphisme canonique

$$u : \overline{Y} \times_S \overline{H} \to \overline{Y} \times_X \overline{Y}$$

complète le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\overline{Y} \times_S \overline{H} \arrow[r, "u"] \arrow[d, hook, "i"'] & \overline{Y} \times_X \overline{Y} \arrow[d, hook, "j"] \\
P \times_S G \arrow[r, "v"] & P \times_X P
\end{tikzcd}$$

où v est un isomorphisme, i et j sont deux immersions fermées. Il s'ensuit que u est une immersion fermée aussi.

Le quotient $\overline{Y}/\overline{H}$ est rerpésenté par un schéma tel que $p : \overline{Y} \to \overline{Y}/\overline{H}$ est fidèlement plat et le morphisme $\overline{Y} \to X$ se factorise par un morphisme $\lambda : \overline{Y}/\overline{H} \to X$ dont on va étudier les propriétés :

- ◇ λ est séparé : l'isomorphisme $\overline{Y} \times_S \overline{H} \simeq \overline{Y} \times_{\overline{Y}/\overline{H}} \overline{Y}$ et le fait que $p : \overline{Y} \to \overline{Y}/\overline{H}$ est fidèlement plat, assurent que $p : \overline{Y} \to \overline{Y}/\overline{H}$ est un $\overline{H}$-torseur, en particulier

p est propre. Ensuite il suffit de considérer le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \overline{Y} \arrow[r, hook, "\Delta_2"] \arrow[d, "p"'] & \overline{Y} \times_X \overline{Y} \arrow[d, "p\times p"] \\ \overline{Y}/\overline{H} \arrow[r, "\Delta_1"] & \overline{Y}/\overline{H} \times_X \overline{Y}/\overline{H} \end{tikzcd}$$

où Δ_2 est une immersion fermée car $\overline{Y} \to X$ est propre. Ce diagramme entraîne

$$\Delta_1(\overline{Y}/\overline{H}) = \Delta_1(p(\overline{Y})) = (p \times p)(\Delta_2(\overline{Y}))$$

qui est fermé dans $\overline{Y}/\overline{H} \times_X \overline{Y}/\overline{H}$ puisque $(p \times p)\Delta_2$ est propre. Donc λ est séparé ([Ha77], II, Corollary 4.2).

- ◇ λ est propre : λ est séparé, p est surjectif, $\lambda \circ p$ est propre comme composé du morphisme $P \to X$ et de l'immersion fermée $\overline{Y} \hookrightarrow P$, tous deux propres ; donc λ est propre ([Li02], Ch 3, Prop 3.16 (f)).
- ◇ λ est quasi-fini : il est propre, donc de type fini et en plus on observe que pour tout $x \in X$ $\lambda^{-1}(x)$ est fini.
- ◇ λ est fini (donc en particulier affine) : un morphisme propre et quasi-fini est en particulier fini ([EGA IV.3] Théorème 8.11.1).
- ◇ λ est surjectif : l'image de λ dans X contient l'image de $\lambda \circ p$ qui est dense dans X ; par ailleurs, la propreté de λ assure que $\lambda(\overline{Y}/\overline{H})$ est fermé dans X. On en déduit l'égalité $\lambda(\overline{Y}/\overline{H}) = X$.
- ◇ λ est un isomorphisme : $\lambda_s : (\overline{Y}/\overline{H})_s \to X_s$ est surjectif, mais X_s est réduit donc $\lambda_s^{\#} : \mathcal{O}_{X_s} \hookrightarrow (f_s)_*(\mathcal{O}_{\overline{Y}/\overline{H}})$ est injectif ([EGA I], Corollaire 1.2.7).

C'est ce qu'il fallait démontrer.

□

Du fait que la catégorie des torseurs fini sur X_η, pointés au dessus de X_η, est cofiltrée (c'est ce qu'on a raconté dans §2.1.2) et au moyen du Lemme 2.1.10 ce n'est donc pas difficile de conclure la preuve du Théorème 2.1.9, d'où l'existence du schéma en groupes fondamental de X en x classifiant tous les torseurs finis et pointés au dessus de x.

On pourrait conclure ici ce paragraphe, sans que le synopsis de ces notes ne soit affecté, mais puisque ça ne prendra que quelques lignes on décrit un résultat important contenu dans [AntEmGa15] qui ne figurait pas dans [Gas03] :

Théorème 2.1.11. *Soit X un schéma connexe, fidèlement plat au dessus d'un schéma de Dedekind S, $x \in X(S)$ un point. On suppose de plus que pour tout $s \in S$ la fibre X_s est intègre et normale. Alors la catégorie des torseurs quasi-finis sur X, pointés au dessus de x, est cofiltrée.*

Ça entraîne l'existence d'un S-schéma en groupes $\pi(X,x)^{\mathrm{qf}}$ pro-quasi-fini et d'un $\pi(X,x)^{\mathrm{qf}}$-torseur universel sur X pointé au dessus de x, limite projective de tous les torseurs quasi-finis pointés au dessus de x. On appelle $\pi(X,x)^{\mathrm{qf}}$ le *schéma en groupes fondamental quasi-fini.*

Ce résultat est beaucoup plus qu'une simple généralisation du Théorème 2.1.9. En fait si on se donne un G-torseur fini sur la fibre générique X_η de X il est possible qu'il existe un torseur sur X sous l'action d'un S-schéma en groupes quasi-fini, dont la fibré générique est isomorphe au torseur donné, même lorsque le torseur donné ne s'étend pas en un torseur fini. Ce qui donne au morphisme $\pi(X_\eta, x_\eta) \to \left(\pi(X,x)^{\mathrm{qf}}\right)_\eta$, qui est toujours fidèlement plat, plus de chances d'être un isomorphisme par rapport à $\pi(X_\eta, x_\eta) \to (\pi(X,x))_\eta$, fidèlement plat lui aussi, nous rapprochant au *rêve* de Grothendieck, énoncé dans l'introduction.

2.1.4 Description tannakienne sur l'anneau des vecteurs de Witt

D'après la théorie des réseaux tannakiens introduite par Wedhorn dans [We04] (brièvement rappelée dans §2.1), de nombreuses mathématiciens se sont demandé si elle pouvait être utilisée pour interpréter le schéma en groupes fondamental comme schéma en groupes associé à un certain réseau tannakien. Une première tentative est contenue dans un article de Mehta et Subramanian : dans [MeSu13] on trouve en effet une construction "tannakienne", au sens de Wedhorn, qui donne lieu à un schéma en groupes fondamental pour un schéma X défini sur l'anneau des vecteur de Witt $W := W(k)$, k étant un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Cependant cet objet n'est pas un W-schéma en groupes, mais un $\overline{W}$-schéma en groupes, où $\overline{W}$ est la clôture intégrale de W dans la clôture algébrique $\overline{Frac(W)}$ de $Frac(W)$: l'anneau $\overline{W}$ est donc de Prüfer, non noethérien. On rappelle de suite les détails qui seront utiles à la compréhension des sections suivantes.

Soit donc X un schéma connexe, lisse et projectif sur W. Pour toute extension finie K' de K on dénotera par W' la clôture intégrale de W dans K' (avec corps résiduel k) et par X' le produit fibré $X \times_W W'$. Un fibré vectoriel V sur X' est dit essentiellement fini, d'après [MeSu13], si les restrictions V_k et $V_{K'}$ respectivement à $(X')_k := X' \times_{W'} k \simeq X_k$ et $(X')_{K'} := X' \times_{W'} K'$ sont essentiellement finis au sens usuel. On fixe un point $x \in X(W)$ et on dénote par $x_{\overline{W}}$ son tiré sur $\overline{W}$, qui donne donc un point de $X_{\overline{W}}$. Soit $\mathcal{L}$ la sous-catégorie pleine de $Coh(X_{\overline{W}})$ (faisceaux cohérents sur $X_{\overline{W}}$) dont les objets sont définis comme suit : $V \in Ob(Coh(X_{\overline{W}}))$ appartient à $Ob(\mathcal{L})$ si et seulement si il existe une extension finie K' de K et un fibré vectoriel essentiellement fini V' sur X', tel que V est le tiré de V' sur $X_{\overline{W}}$. La catégorie $\mathcal{L}$ munie du foncteur fibre $x^*_{\overline{W}} : \mathcal{L} \to \overline{W}\text{-}mod$ est un réseau tannakien. On dénote par $\pi^{\text{ét}}(X_{\overline{W}}, x_{\overline{W}})$ le $\overline{W}$-schéma en groupes affine qu'on lui associe et on l'appelle le schéma en groupes fondamental de $X_{\overline{W}}$.

2.2 Premières propriétés et premières questions

Étant une généralisation du groupe fondamental étale, il est tout à fait naturel de se demander si les propriétés satisfaites par ce dernier sont satisfaites aussi par le schéma en groupes fondamental. C'est dans [No82], que Nori conjecture les deux propriétés suivantes :

1. si X est un schéma complet, géométriquement connexe et réduit sur un corps algébriquement clos k et si L est un corps algébriquement clos, extension de k, alors le morphisme $\pi(X_L, x_L) \to \pi(X,x)_L$ est un isomorphisme.
2. Soient X et Y deux schémas réduits, connexes et propres sur un corps algébriquement clos k et fixons des points $x \in X$ et $y \in Y$. Alors le morphisme naturel

$$\varphi : \pi(X \times_k Y, (x,y)) \to \pi(X,x) \times_k \pi(Y,y)$$

   induit par les projections $p_X : X \times_k Y \to X$ et $p_Y : X \times_k Y \to Y$ est un isomorphisme.

En caractéristique 0 elles sont bien sûr vraies et une preuve se trouve dans [SGA1] mais en caractéristique positive Nori n'a pas su donner une réponse satisfaisante dans sa thèse. Ce n'est qu'en 1983 que Nori donne, dans [No83], une première réponse partielle à la première question. En effet il démontre que sur un corps quelconque k le schéma en groupes fondamental d'une variété abélienne V est donnée par la limite suivante

$$\pi(V, 0_V) \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} ker(n_V)$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$ le morphisme $n_V : V \to V$ est la multiplication par n. Il est donc clair que si k est algébriquement clos et si L est un corps algébriquement clos, extension de k, alors le morphisme $\pi(V_L, 0_{V,L}) \to \pi(V, 0_V)_L$ est un isomorphisme. Mais c'est déjà dans le cas des courbes de genre $g \geq 2$ que la conjecture s'avère ne pas etre vraie. Ce sont Mehta et Subramanian qui donnent un premier contre-exemple dans [MeSu02] : il suffit de prendre une courbe intègre et projective avec au moins une singularité cuspidale. Le cas *lisse* restait donc ouvert, mais Christian Pauly dans [Pa07] a donné un exemple de courbe C de genre 2 en caractéristique 2, pour laquelle le morphisme $\pi(C_L, 0_{C,L}) \to \pi(C, 0_C)_L$ n'est pas un isomorphisme. En fait quelle que soit la caractéristique du corps on sait trouver des contre-exemples. Ça a été démontrée dans [St14] par Axel Stäbler.

En ce qui concerne la première question, sur une formule *produit* pour le schéma en groupes fondamental, la réponse est en revanche positive et se trouve dans [MeSu02]. D'autres preuves existent désormais : plus loin on rappellera la construction du S-schéma en groupes fondamental, pour lequel une formule produit est satisfaite (voir [La11] et [AntMe13]). Le schéma en groupes fondamental de Nori, étant un quotient du S-schéma en groupes fondamental, hérite donc de façon très naturelle la même propriété. Ceci sera expliqué dans §2.6.

Soit maintenant R un anneau de valuation discrète, de corps résiduel k et corps des fractions K. Soit X un schéma fidèlement plat sur $Spec(R)$ de fibre spéciale $X_s := X \times_{Spec(R)} Spec(k)$ et de fibre générique $X_\eta := X \times_{Spec(R)} Spec(K)$. Si de plus $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K alors on pose $X_{\overline{\eta}} := X_\eta \times_{Spec(K)} Spec(\overline{K})$. On a mentionné plus haut la théorie de spécialisation de Grothendieck. Ici on la rappelle suivant [Sz09] §5.7 :

Théorème 2.2.1. *Soit R complet et X propre sur $Spec(R)$. On fixe deux points géométriques $\overline{x} \in X_{\overline{\eta}}$ et $\overline{y} \in X_s$, alors :*

1. *Le morphisme $\pi^{ét}(X_s, \overline{y}) \to \pi^{ét}(X, \overline{y})$ induit par $X_s \to X$ est un isomorphisme.*
2. *Si de plus k est algébriquement clos, $X_{\overline{\eta}}$ et X_s sont réduits, alors le morphisme $\pi^{ét}(X_{\overline{\eta}}, \overline{x}) \to \pi^{ét}(X, \overline{x})$ induit par $X_{\overline{\eta}} \to X$ est surjectif.*

En particulier si k est algébriquement clos, en vertu de l'isomorphisme $\pi^{\text{ét}}(X, \overline{x}) \xrightarrow{\simeq} \pi^{\text{ét}}(X, \overline{y})$, on obtient le morphisme surjectif suivant, dit de *spécialisation* :

$$sp : \pi^{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \overline{x}) \twoheadrightarrow \pi^{\text{ét}}(X_s, \overline{y}).$$

Ce morphisme n'est pas un isomorphisme en général : c'est Grothendieck même qui observe qu'il existe des schémas abéliens X (même dans le cas de dimension relative 1) pour lesquels sp n'est pas injectif. Il devient cependant un isomorphisme lorsque on considère la partie "première à p". Plus précisément si G est un groupe pro-fini, on note par $G^{(p')}$ son plus grand quotient obtenu en effaçant, dans la limite qui le définit, les groupes finis d'ordre p. Alors on obtient l'isomorphisme suivant :

$$sp^{(p')} : \pi^{\text{ét}}(X_{\overline{\eta}}, \overline{x})^{(p')} \xrightarrow{\simeq} \pi^{\text{ét}}(X_s, \overline{y})^{(p')}.$$

Suivant cette théorie fascinante on peut se demander si on sait étendre ces résultats au cas du schéma en groupes fondamental. Artin et Grothendieck nous ont prévenu, comme on a déjà rappelé, qu'il ne faut pas s'attendre à ce que le schéma en groupes fondamental se conduise *mieux* que le groupe fondamental étale. Ceci-dit il reste très intéressant, après avoir fixé un point $x \in X(R)$ de comprendre les liens parmi les schémas en groupes suivants : $\pi(X,x)$, $\pi(X_\eta,x_\eta)$ et $\pi(X_s,x_s)$. Puisque il ne s'agit plus de groupes abstraits mais de schémas en groupes il faut immédiatement renoncer à un morphisme qui ressemble à sp reliant $\pi(X_\eta,x_\eta)$ à $\pi(X_s,x_s)$. En effet puisque $\pi(X,x)$ est un R-schéma en groupes on peut mettre en relation sa fibre générique $\pi(X,x)_\eta$ avec $\pi(X_\eta,x_\eta)$ et sa fibre spéciale $\pi(X,x)_s$ avec $\pi(X_s,x_s)$. Plus précisément on veut étudier les morphismes

$$\varphi : \pi(X_\eta,x_\eta) \to \pi(X,x)_\eta \qquad \psi : \pi(X_s,x_s) \to \pi(X,x)_s. \tag{2.3}$$

Dans [Ant09] on a obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.2.2. *Soit X un schéma connexe ayant les fibres générique et spéciale réduites et soit $X \to Spec(R)$ un morphisme fidèlement plat. Alors le morphisme φ : $\pi(X_\eta,x_\eta) \to \pi(X,x)_\eta$ est surjectif.*

C'est plus ou moins tout ce qu'on peut dire pour un schéma X quelconque sans d'autres hypothèses ou sans *restreindre le champ d'action.* Il y a par exemple, tout bêtement, un obstacle insurmontable : il existe des K-schémas en groupes finis qui ne s'étendent pas à des R-schémas en groupes finis et plats (ce phénomène *gênant* sera rappelé dans §3) et il existe aussi des k-schémas en groupes finis qui ne se relèvent pas à des R-schémas en groupes finis et plats. Soit par exemple G un K-schéma en groupes fini qui ne s'étend pas. Si G est un quotient de $\pi(X_\eta,x_\eta)$ alors le morphisme $\varphi : \pi(X_\eta,x_\eta) \to \pi(X,x)_\eta$ sera certainement *non* injective. On estime donc très peu probable que φ et ψ puissent être injectifs pour X comme dans le Théorème 2.2.2, même si on ajoutait l'hypothèse $X \to Spec(R)$ propre. Ceci-dit dans un cas très particulier φ et ψ sont des isomorphismes. C'est le deuxième résultat de [Ant09] :

Théorème 2.2.3. *Soit X un schéma abélien et $x = 0_X$ son unité, alors*

$$\pi(X,0_X) \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} ker(n_X)$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$ le morphisme $n_X : X \to X$ est la multiplication par n. De plus les morphismes (2.3) sont des isomorphismes.

Ça généralise ainsi (en l'utilisant, bien sûr) le résultat de [No83] et nous laisse espérer que si on prend un R-schéma *quelconque* X, disons lisse et projectif pour l'instant, l'abélianisé (qu'il faut encore définir) $\pi(X,x)^{\mathrm{ab}}$ de $\pi(X,x)$ *commute aux fibres générique et spéciale* de façon plus satisfaisante par rapport à $\pi(X,x)$. Tout ceci sera l'objet de §2.3.

2.3 L'abélianisé du schéma en groupes fondamental

Soient S un schéma de Dedekind (on inclut le cas où S est le spectre d'un corps) et X un schéma fidèlement plat sur S tel que pour tout $s \in S$ la fibre X_s est réduite. Comme d'habitude on fixe un point $x \in X(S)$; le schéma en groupes fondamental de X en x étant un schéma en groupes pro-fini, la façon la plus naturelle de définir un *abélianisé* pour $\pi(X,x)$ consiste à *effacer*, dans la limite projective définissant $\pi(X,x)$ tous les termes non commutatifs. Plus précisément la catégorie des torseurs au dessus de X, pointés au dessus de x, sous l'action d'un schéma en groupes commutatif, fini et plat est cofiltrée : on en prend donc la limite projective qui donne lieu à un triplet universel $(\tilde{X}^{\mathrm{ab}}, \pi(X,x)^{\mathrm{ab}}, \tilde{x}^{\mathrm{ab}})$ où $\pi(X,x)^{\mathrm{ab}}$ est un S-schéma en groupes commutatif et $\tilde{X}^{\mathrm{ab}}$ est un $\pi(X,x)^{\mathrm{ab}}$-torseur au dessus de X, pointé en $\tilde{x}^{\mathrm{ab}}$. On appelle $\pi(X,x)^{\mathrm{ab}}$ l'abélianisé de $\pi(X,x)$ ou encore le schéma en groupes fondamental abélien de $\pi(X,x)$. Dans [Ant10] on a mis en relation, lorsque il était possible, $\pi(X,x)^{\mathrm{ab}}$ avec le schéma en groupes fondamental du schéma d'Albanese de X ; on connaît très bien ce dernier schéma en groupes d'après [No83] et le Théorème 2.2.3. La source d'inspiration a été encore une fois le cas *classique*, à savoir l'abélianisé du groupe fondamental étale $\pi^{\text{ét}}(X,x)^{\mathrm{ab}}$. En effet on sait ([Mi86], §9) que si C est une courbe projective et lisse sur un corps séparablement clos alors le morphisme qui va de C vers sa Jacobienne J_C induit un morphisme $\pi^{\text{ét}}(C,\overline{c})^{\mathrm{ab}} \to \pi^{\text{ét}}(J_C, \overline{0}_{J_C})$ qui est un isomorphisme. Ici $\overline{c}$ est, comme on l'a appris, un point géométrique qui s'envoie dans $\overline{0}_{J_C}$, un point géométrique au dessus de 0_{J_C}, l'unité de J_C. Un énoncé plus complexe et certainement *moins beau*, au moins en caractéristique positive, existe aussi en dimension supérieure ([Mi80], III, §4, Corollary 4.19 et [Sz09], §5.8) : si X est un schéma lisse et propre sur un corps k algébriquement clos, si $\mathbf{Pic}_{X/k}$ est lisse et si $\mathbf{NS}_{X/k}$ est sans torsion (la définition de ces deux objets sera rappelée dans quelques lignes) alors on a, modulo p-groupes (p étant la caractéristique de k), la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow (NS(X)_{\mathrm{tors}})^* \longrightarrow \pi^{\text{ét}}(X,x)^{\mathrm{ab}} \longrightarrow T(\mathbf{Alb}_{X/k}(k)) \longrightarrow 0 \tag{2.4}$$

où

$(NS(X)_{\mathrm{tors}})^*$ est le dual de Pontryagin de la partie de torsion du groupe de Néron-Severi de X : c'est donc un groupe fini ;

$T(\mathbf{Alb}_{X/k}(k))$ est une fois de plus la limite projective des noyaux $ker(n_{\mathbf{Alb}_{X/k}(k)})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $n_{\mathbf{Alb}_{X/k}(k)}$ étant la multiplication par n.

En particulier si $car(k) = 0$ ce que l'on obtient est la suite (2.4) tout-court, l'opération *modulo p-groupes* étant *vide*.

Le résultat qu'on envisageait obtenir était donc une suite exacte, pour $\pi(X,x)^{\mathrm{ab}}$, qui ressemble à celle donnée par (2.4). On verra que la suite qu'on obtiendra pour $\pi(X,x)^{\mathrm{ab}}$ sera beaucoup plus simple et sa description plus claire. Avant d'énoncer les principaux résultats on rappelle très rapidement les objets qui interviendront dans nos formules : plus de détails sont bien sûr contenus dans l'article [Ant10]. Soit donc S un schéma de Dedekind (le cas où S est le spectre d'un corps est inclus) et $X \to S$ en morphisme fidèlement plat. Si T est un schéma quelconque $Pic(T)$ dénotera comme d'habitude son groupe de Picard. Pour ne pas se perdre dans tous les "*Pic*" qui apparaîtront dans la suite il faut consacrer un petit instant à les définir tous. On commence par le foncteur contravariant $Pic_{X/S}$, appelé le *foncteur de Picard relatif*, qui va de la catégorie des S-schémas $\mathcal{S}ch/S$ vers la catégorie des groupes abéliens $\mathcal{A}b$, donné par la formule

$$Pic_{X/S}(T) := Pic(X_T)/f^*(Pic(T)).$$

On dénote par $Pic_{(X/S)(zar)}$, $Pic_{(X/S)(ét)}$, $Pic_{(X/S)(fppf)}$ les faisceaux associés à $Pic_{X/S}$ dans les topologies de Zariski, étale et fppf (respectivement). Si S est le spectre d'un anneau commutatif unitaire R on écrira souvent $Pic_{X/R}$ au lieu de $Pic_{X/Spec(R)}$. D'après, par exemple, [Kl05] on sait que les morphismes naturels

$$Pic_{X/S} \to Pic_{(X/S)(zar)} \to Pic_{(X/S)(ét)} \to Pic_{(X/S)(fppf)} \tag{2.5}$$

sont des isomorphismes lorsque $\mathcal{O}_S \simeq f_*(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme universel (c.a.d. si pour tout S-schéma T le morphisme naturel $\mathcal{O}_T \to f_{T*}\mathcal{O}_{X_T}$ est un isomorphisme). Cette propriété est par exemple satisfaite si $f : X \to S$ est propre et plat et si les fibres de f

sont réduites et connexes. Lorsque $Pic_{(X/S)(fppf)}$ est représentable on appelle *schéma de Picard* le schéma qui le représente, qui sera dénoté par $\mathbf{Pic}_{X/S}$. Il existe plusieurs résultats concernant la représentabilité de $Pic_{(X/S)(fppf)}$, mais on ne les rappellera pas ici. Ils sont étudiés dans [Kl05] et regroupés aussi dans [Ant10]. Les hypothèses dans lesquelles nous nous placerons feront en sorte que $\mathbf{Pic}_{X/S}$ existe toujours et que les morphismes (2.5) soient des isomorphismes, ce qui rendra plus confortables nos calculs. On définit maintenant $Pic^0_{X/S}$ comme l'union, en tant qu'ensemble, de tous les $\mathbf{Pic}^0_{X_s/k(s)}$, pour tout $s \in S$, c'est à dire la composante connexe de $\mathbf{Pic}_{X_s/k(s)}$ (on suppose qu'il existe) pour chaque fibre de f ; on suppose maintenant que $\mathbf{Pic}_{X/S}$ existe aussi et on se demande s'il existe un sous-S-schéma en groupes ouvert de $\mathbf{Pic}_{X/S}$, qu'on dénote $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$, tel que pour tout point $s \in S$, $\mathbf{Pic}^0_{X/S} \times_S k(s) \simeq \mathbf{Pic}^0_{X_s/k(s)}$. En tant qu'ensemble ce serait $Pic^0_{X/S}$. Vue l'importance de cet objet il vaut mieux rappeler un résultat d'existence, contenu essentiellement dans [Kl05] :

Théorème 2.3.1. *On suppose que $\mathbf{Pic}_{X/S}$ existe et qu'il est séparé sur S. Si pour tout $s \in S$ les $\mathbf{Pic}^0_{X_s/k(s)}$ sont lisses et ont même dimension alors $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ existe aussi et il est de type fini sur S. De plus, puisque S est réduit et noethérien, alors $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ est lisse sur S, il est fermé dans $\mathbf{Pic}_{X/S}$ et projectif sur S.*

Quand $\mathbf{Pic}_{X/S}$ existe alors on considère le morphisme *multiplication par n* pour tout entier $n > 0$ $n_{\mathbf{Pic}_{X/S}} : \mathbf{Pic}_{X/S} \to \mathbf{Pic}_{X/S}$; on définit l'ensemble

$$\mathbf{Pic}^\tau_{X/S} := \cup_n n^{-1}(Pic^0_{X/S}).$$

S'il est ouvert dans $\mathbf{Pic}_{X/S}$ il hérite donc une structure de schéma. Encore un résultat d'existence :

Théorème 2.3.2. *Si $f : X \to S$ est projectif et plat avec fibres irréductibles et connexes alors $\mathbf{Pic}^\tau_{X/S}$ est un sous-schéma en groupes fermé et ouvert de $\mathbf{Pic}_{X/S}$, quasi-projectif et de type fini sur S. Si f est lisse alors $\mathbf{Pic}^\tau_{X/S}$ est projectif sur S.*

On a enfin tous les ingrédients pour définir le schéma d'Albanese et le schéma de Néron-Severi : supposons donc que $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ existe et que c'est un schéma abélien, alors on peut construire son dual :

$$\mathbf{Alb}_{X/S} := (\mathbf{Pic}^0_{X/S})^* := \mathbf{Pic}^0_{\mathbf{Pic}^0_{X/S}}$$

connu sous le nom de *schéma d'Albanese de X sur S* qui existe d'après le Théorème 2.3.1 et c'est encore un schéma abélien. Lorsque $f : X \to S$ est une courbe relative lisse et projective avec fibres géométriquement intègres on sait que $\mathbf{J}_{X/S} := \mathbf{Pic}^0_{X/S} = \mathbf{Pic}^\tau_{X/S}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Alb}_{X/S}$: dans ce cas on parle de la *Jacobienne de X sur S* qui existe toujours dans les hypothèses ci-dessus. Ce qui est vrai pour les courbes n'est plus vrai en général en dimension quelconque : l'égalité $\mathbf{Pic}^0_{X/S} = \mathbf{Pic}^\tau_{X/S}$, en dimension quelconque, n'est qu'un cas particulier et elle n'est pas très souvent satisfaite. Il faut donc étudier le cas où $\mathbf{Pic}^0_{X/S} \subset \mathbf{Pic}^\tau_{X/S}$, ce qui nous permettra de nous rapprocher de la suite 2.4. Si $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ est un schéma abélien et si $\mathbf{Pic}^\tau_{X/S}$ est projectif et plat sur S alors $\mathbf{Pic}^0_{X/S}$ est ouvert et fermé dans $\mathbf{Pic}^\tau_{X/S}$. On considère alors le faisceau, dans la topologie $fpqc$, $NS^\tau_{X/S} := \mathbf{Pic}^\tau_{X/S}/\mathbf{Pic}^0_{X/S_{(fpqc)}}$, qui est représentable, sous nos hypothèses, par un S-schéma en groupes $\mathbf{NS}^\tau_{X/S}$ fini et lisse sur S. On l'appelle le *le schéma de torsion de Néron-Severi* puisque il s'avère être la *partie de torsion* du schéma de Néron-Severi $\mathbf{NS}_{X/S}$ qu'on définit comme le schéma qui représente $\mathbf{Pic}_{X/S}/\mathbf{Pic}^0_{X/S_{(fpqc)}}$. On peut maintenant énoncer le résultat principal :

Théorème 2.3.3. *Soient S un schéma de Dedekind, X un schéma intègre, $f : X \to S$ un morphisme de type fini et fidèlement plat muni d'une section $x : S \to X$ et tel que $\mathcal{O}_S \simeq f_*(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme universel. On suppose que $\mathbf{Alb}_{X/S}$ et $\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S}$ existent ; alors le morphisme naturel $X \to \mathbf{Alb}_{X/S}$ qui envoie $x \mapsto 0_{\mathbf{Alb}_{X/S}}$ induit un morphisme $\pi^{ab}(X, x) \to \pi(\mathbf{Alb}_{X/S}, 0_{\mathbf{Alb}_{X/S}})$ qui donne lieu à la suite exacte de S-schémas en groupes suivante :*

$$0 \longrightarrow (\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S})^{\vee} \longrightarrow \pi_1(X, x)^{ab} \xrightarrow{\varphi^{ab}} \pi_1(\mathbf{Alb}_{X/S}, 0_{\mathbf{Alb}_{X/S}}) \longrightarrow 0 \tag{2.6}$$

où $(\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S})^{\vee}$ est le dual de Cartier de $\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S}$.

Démonstration. On a bien sûr été inspiré par les techniques incluses dans la preuve de [Mi80], III, §4, Corollary 4.19. Les détails se trouvant dans [Ant10], Theorem 3.6, on donnera ici un aperçu de la preuve, qu'on peut diviser un deux parties :

1. le morphisme φ^{ab} est fidèlement plat ;
2. le noyau de φ^{ab} est isomorphe à $(\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S})^{\vee}$.

On montre d'abord que si G est un S-schéma en groupes fini, plat et commutatif alors il existe un isomorphisme entre le groupe $H^1_{\bullet}(X, G)$ des classes d'isomorphismes des torseurs sur X pointés au dessus de x et le groupe $Hom_S(G^{\vee}, \mathbf{Pic}^{\tau}_{X/S})$. De plus si on définit $N := |\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S}|$ et $m := |G|$ alors ce dernier isomorphisme nous donne, après factorisation, l'isomorphisme $H^1_{\bullet}(X, G) \simeq Hom_S(G^{\vee}, {}_{N\cdot m}\mathbf{Pic}^{\tau}_{X/S})$ et par conséquent $H^1_{\bullet}(X, G) \simeq Hom_S(({}_{N\cdot m}\mathbf{Pic}^{\tau}_{X/S})^{\vee}, G)$ et encore

$$Hom_S(\pi_1(X, x)^{ab}, G) \simeq Hom_S(({}_{N\cdot m}\mathbf{Pic}^{\tau}_{X/S})^{\vee}, G)$$

ce qui nous permet de trouver, en posant $G = ({}_{N\cdot m}\mathbf{Pic}^{\tau}_{X/S})^{\vee}$ un morphisme ρ^{τ}_m : $\sigma : \pi_1(X, x)^{ab} \to \varprojlim_{m\in\mathbb{N}}({}_{N\cdot m}\mathbf{Pic}^{\tau}_{X/S})^{\vee}$; mais cette dernière limite est isomorphe à $\pi_1(\mathbf{Alb}_{X/S}, 0_{\mathbf{Alb}_{X/S}})$ et on montre aisément que la flèche est fidèlement plate ([Ant10], Lemma 3.5). Pour la preuve du point 2) on part de la suite

$$0 \longrightarrow (\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S})^{\vee} \longrightarrow ({}_{N\cdot m}\mathbf{Pic}^{\tau}_{X/S})^{\vee} \longrightarrow ({}_{N\cdot m}\mathbf{Pic}^{0}_{X/S})^{\vee} \longrightarrow 0$$

et on passe à la limite.

□

Dans [Ant10], §3.3 on énumère une liste de cas où $\mathbf{Alb}_{X/S}$ et $\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S}$ existent effectivement ce qui rend l'énoncé du Théorème 2.3.3 *non vide*. Les cas où on a le moins de problèmes d'existence sont sans doute ceux où S est le spectre d'un corps et celui où X est une courbe relative. On rappelle ce dernier ici de suite :

Corollaire 2.3.4. *Soit $f : X \to S$ une courbe relative lisse et projective. Alors la suite (2.6) donne lieu à un isomorphisme*

$$\pi^{ab}(X, x) \xrightarrow{\simeq} \pi(\mathbf{J}_{X/S}, 0_{\mathbf{J}_{X/S}}).$$

Démonstration. Ça suit du Théorème 2.3.3 et du fait que dans ce cas $\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S}$ est trivial.
□

Si S est le spectre d'un corps algébriquement clos alors il existe une deuxième preuve pour le Théorème 2.3.3 (et par conséquent pour son corollaire) : elle se trouve dans

[La12], §5 : dans cet article Langer prouve un résultat tout à fait analogue pour l'abélianisé $\pi^S(X,x)^{\mathrm{ab}}$ du S-schéma en groupes fondamental mais puisque $\pi(X,x)$ est le complété pro-fini de $\pi^S(X,x)$ on retrouve facilement le résultat donné au Théorème 2.3.3. Langer s'occupe aussi du cas où $\mathbf{Pic}_{X/S}$ n'est pas réduit. La preuve de Langer utilise la description tannakienne de $\pi^S(X,x)$ (voir §2.6), qui est la seule connue, à présent. Notre preuve, en revanche, ne contient aucun outil tannakien, ce qui nous a permis de choisir comme schéma de base un schéma de Dedekind quelconque. Ceci est très important pour les applications qu'on avait en tête : on suppose, pour simplifier les notations, que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète R et on dénote η et s le point ouvert et fermé respectivement ; on reprend donc les morphismes (2.3), qu'on rappelle :

$$\varphi : \pi(X_\eta, x_\eta) \to \pi(X,x)_\eta \qquad \psi : \pi(X_s, x_s) \to \pi(X,x)_s.$$

On appelle

$$\varphi^{\mathrm{ab}} : \pi(X_\eta, x_\eta)^{\mathrm{ab}} \to \pi(X,x)^{\mathrm{ab}}_\eta \qquad \psi^{\mathrm{ab}} : \pi(X_s, x_s)^{\mathrm{ab}} \to \pi(X,x)^{\mathrm{ab}}_s$$

les restrictions de φ et ψ aux abélianisés des schémas en groupes fondamentaux des fibres générique et spéciale. Une conséquence importante de la théorie qui précède est le résultat suivant :

Corollaire 2.3.5. *Soient S un schéma de Dedekind, X un schéma intègre, $f : X \to S$ un morphisme de type fini et fidèlement plat muni d'une section $x : S \to X$ et tel que $\mathcal{O}_S \simeq f_*(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme universel. On suppose que $\mathbf{Alb}_{X/S}$ et $\mathbf{NS}^\tau_{X/S}$ existent ; alors les morphismes φ^{ab} et ψ^{ab} sont des isomorphismes.*

Ce que ça entraîne pour les torseurs est peut être déjà clair, mais ce sera rappelé à la section §3.2.

2.4 La propriété de Grothendieck-Lefschetz pour le schéma en groupes fondamental

Soit Z un schéma connexe, lisse et projectif sur un corps algébriquement clos k. Soient maintenant Y une hypersurface ample, lisse et connexe de Z, y un point quelconque de Y alors la théorie de Grothendieck-Lefschetz (cf. [SGA2], Exposé X) que le morphisme induit sur les groupes fondamentaux étales

$$\pi_1^{\text{ét}}(Y,y) \to \pi_1^{\text{ét}}(Z,y)$$

est surjectif quand $dim(Z) \geq 2$ et un isomorphisme lorsque $dim(Z) \geq 3$, donc en particulier si $car(k) = 0$ le résultat reste automatiquement vrai pour le schéma en groupes fondamental (si k n'est pas algébriquement clos c'est encore vrai, il suffit de faire intervenir la suite exacte courte fondamentale). Si $car(k) = p > 0$ Biswas et Holla dans [BiHo07] (mais aussi Mehta dans [Me11]), ont prouvé une généralisation, qui se présente sous la forme suivante :

Théorème 2.4.1. *Soit H un fibré en droites très ample sur Z alors si $dim(Z) \geq 2$ le morphisme naturel*

$$\widehat{\varphi} : \pi_1(Y,y) \to \pi_1(Z,y)$$

entre les schémas en groupes fondamentaux de Y et Z induit par l'inclusion $\varphi : Y \hookrightarrow Z$ est fidèlement plat lorsque Y est dans le système linéaire complet $|H^{\otimes d}|$ pour tout entier $d \geq d_0$ où d_0 est un entier qui ne dépend que de Z. Si de plus $dim(Z) \geq 3$, alors $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme lorsque Y est dans le système linéaire complet $|H^{\otimes d}|$ pour tout entier $d \geq d_1$ où d_1 est un entier qui ne dépend que de Z.

Il est naturel de se demander si un tel énoncé reste vrai pour un schéma relatif, c'est à dire pour un schéma défini sur un schéma de Dedekind. Pour un tel schéma on sait construire son schéma en groupes fondamental et on dispose de deux constructions actuellement : celle *pro-finie* rappelée dans §2.1.2 et la construction *tannakienne* rappelée dans §2.1.4. Dans [AntMe12], travail en collaboration avec Vikram Mehta, nous avons suivi la deuxième construction ce qui limite notre champ d'action à la situation suivante : soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, W l'anneau des vecteurs de Witt sur k et R la clôture intégrale de W dans $\overline{K}$, clôture algébrique de $K := Frac(W)$. Partout où on écrira les indices $_R$, $_{\overline{K}}$, etc. on entendra les tirés sur $Spec(R)$, $Spec(\overline{K})$, etc.. Le résultat principal de notre collaboration est le suivant :

Théorème 2.4.2. *Soient X un schéma connexe, lisse et projectif sur W et H un fibré en droites relativement ample sur X.*

1. *Si $dim(X/W) \geq 2$ alors il existe un entier d_0 (qui ne dépend que de X) tel que pour tout $d \geq d_0$, tout $Y \in |H^{\otimes d}|$ connexe et lisse sur W et tout $y \in Y(W)$ le R-morphisme naturel de schémas en groupes fondamentaux $\pi_1(Y_R, y_R) \to \pi_1(X_R, y_R)$ est fidèlement plat.*
2. *Si de plus $dim(X/W) \geq 3$ alors il existe un entier d_1 (qui ne dépend que de X) tel que pour tout $d \geq d_1$, tout $Y \in |H^{\otimes d}|$ connexe et lisse sur W et tout $y \in Y(W)$ le morphisme $\pi_1(Y_R, y_R) \to \pi_1(X_R, y_R)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est [AntMe12], Theorem 1.1. On rappelle la stratégie : pour la fidèle platitude on doit montrer que pour tout extension finie $K \subset K'$ et pour tout G-torseur fini $e : E \to X_{W'}$ tel que $H^0(E, \mathcal{O}_E) = k$, où W' est la clôture intégrale de W dans K', alors $e' : E' \to Y_{W'}$ où $E' := E \times_{X_{W'}} Y_{W'}$ est encore un G-torseur fini satisfaisant à la propriété $H^0(X_{W'}, e_*\mathcal{O}_E) = k$. Si on considère la suite exacte longue

$$.. \to H^0(X_{W'}, e_*(\mathcal{O}_E)) \to H^0(Y_{W'}, {e'}_*(\mathcal{O}_{E'})) \to H^1(X_{W'}, e_*(\mathcal{O}_E)(-d)) \to ..$$

on s'est ramené à prouver que $H^1(X_{W'}, e_*(\mathcal{O}_E)(-d)) = 0$, ce qui est vrai, d'après [AntMe12] Lemma 2.3, pour tout $d \geq d_0$ où d_0 est un entier qui ne dépend que de X. Démontrer que $\pi_1(Y_R, y_R) \to \pi_1(X_R, y_R)$ est une immersion fermée est plus délicat : on veut montrer que tout fibré essentiellement fini V sur $Y_{W'}$ s'étend en un fibré essentiellement fini sur $X_{W'}$. Pour ce faire on a besoin de spécialiser le morphisme $Y_{W'} \to X_{W'}$: tirons donc le morphisme $Y_{W'} \to X_{W'}$ sur $Spec(k)$: nous obtenons $Y_k \to X_k$. Le tiré de V sur Y_k sera noté V_k ; d'après la propriété de Grothendieck-Lefschetz (cf. Théorème 2.4.1) sur des corps de caractéristique positive on sait obtenir un fibré vectoriel essentiellement fini U sur X_k qui donne V_k lorsque on le restreint à Y_k et ce pour tout $d \geq d_1$ où d_1 est un entier qui ne dépend que de X. Après épaississements successifs de degré 0 (on utilise ici la théorie des déformations introduite dans [Gr59] et reprise dans [Il05]) on arrive à construire un fibré vectoriel U sur $X_{W'}$, qu'on prouve être essentiellement fini et qui résulte être isomorphe à V lorsque on le restreint à $Y_{W'}$.

□

2.5 Le schéma en groupes fondamental d'une variété rationnellement connexe par chaînes

Soit X un schéma sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque et x un point k-rationnel de X. On dit que X est rationnellement connexe par chaînes si pour tout corps algébriquement clos Ω qui contient k et pour toute paire de points dans $X(\Omega)$ il y a une courbe propre et connexe qui passe par eux et telle que sa normalisation est union disjointe de droites projectives. Parmi ces variétés on retrouve les variétés rationnelles et les variétés rationnellement connexes (ces trois familles ne coïncident pas lorsque la caractéristique du corps k est positive). Tout cela mérite un joli diagramme où on rappelle les implications les plus célèbres entre les familles de variétés qui “ressemblent” aux variétés rationnelles. On laisse au lecteur le soin de cherhcer les définitions des variétés de la liste suivante qu'on ne mentionnera pas :

- ◇ Rat. = Rationnelles ;
- ◇ Uni-rat. = Uni-rationnelles ;
- ◇ Rég. = Réglées ;
- ◇ Uni-rég. = Uni-réglées ;
- ◇ Sép. rat. con. = Séparablement rationnellement connexes ;
- ◇ Rat. con. = Rationnellement connexes ;
- ◇ Rat. con. p. ch. = Rationnellement connexes par chaînes ;
- ◇ Ell. con. p. ch. = Elliptiquement connexes par chaînes ;

$$
\begin{tikzcd}
\text{Rat.} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{Uni-rat.} \arrow[ll, Rightarrow, bend right, "\text{Prob. de Lürot}"', "X" description] \arrow[dd, Rightarrow] & \\
\text{Rég.} \arrow[d, Rightarrow] & \text{Sép. rat. con.} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\text{Uni-rég.} \arrow[rr, Rightarrow, "X" description] & & \text{Rat. con.} \arrow[ll, Rightarrow, bend right, "\neq\text{point}"'] \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "??"'] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{Fano} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[urr, Rightarrow] & & & \text{Rat. con. p. ch.} \arrow[ul, Rightarrow, bend right, "car(k)=0"'] \arrow[ul, Rightarrow, bend left, "X" description, "car(k)=p>0"] \arrow[d, Rightarrow] \\
& & & \text{Ell. con. p. ch.} \arrow[d, Rightarrow] \\
& & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Biswas a prouvé dans [Bi09] que le schéma en groupes fondamental d'une variété séparablement rationnellement connexe est trivial. Il était donc naturel de calculer le schéma en groupes fondamental $\pi(X, x)$ d'une variété rationnellement connexe par chaînes. C'est l'objet de [AntBi15] travail en commun entre Indranil Biswas et moi. Dans [CL03] Chambert-Loir a démontré que le plus grand quotient étale de $\pi(X, x)$ est fini. Il reste donc à étudier son plus grand quotient local $\pi^{\mathrm{loc}}(X, x)$. On suit la même stratégie déjà utilisé par Chambert-Loir (cf. [CL03]), l'adaptant à notre situation. On met d'abord en relation les schémas en groupes fondamentaux locaux des adhérences V_i et V_{i+1} de deux points p_i et p_{i+1} de X connectés par *une seule* courbe rationnelle : on montre que si $\pi^{\mathrm{loc}}(V_i, v_i)$ est fini il en est de même pour $\pi^{\mathrm{loc}}(V_{i+1}, v_{i+1})$ (où on a choisi deux points v_i et v_{i+1}).

En itérant le processus on peut donc mettre en relation les schémas en groupes fondamentaux locaux des adhérences de deux points de X quelconques en un nombre fini d'étapes. Si maintenant on choisit un point k-rationnel x de X et le point générique ξ de X et on travaille sur la clôture algébrique du corps des fonctions de X, on trouve une chaîne de courbes rationnelles qui connecte, par définition, x à ξ. Du fait que le schéma en groupes fondamental local de l'adhérence de x est nul on arrive à montrer que le schéma en groupes fondamental local de l'adhérence de ξ, à savoir X, est fini. Ce que l'on obtient est donc le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. *Soit k un corps algébriquement clos et X un k–schéma normal, rationnellement connexe par chaînes. Soit $x \in X$, alors $\pi^{\mathrm{loc}}(X, x)$ est fini.*

Ce résultat est optimal parce qu'il existe des surfaces rationnellement connexes (donc rationnellement connexes par chaînes) dont le schéma en groupes fondamental local n'est pas trivial. En particulier notre résultat est valable pour les *variétés de Fano*, qui sont rationnellement connexes par chaînes.

2.6 Le S-schéma en groupes fondamental

Il existe plusieurs généralisations du schéma en groupes fondamental de Nori (parmi lesquelles on mentionne les travaux d'Hélène Esnault et Phung Ho Hai [EsHa08] et de Joao Pedro Dos Santos, [Do07]). Ici on se concentre sur le S-schéma en groupes fondamental : cet objet, dont on rappellera rapidement la définition dans quelques lignes, a été défini pour la première fois dans [BiPaSu06] pour une courbe, puis la construction a été généralisée en dimension quelconque dans [La11] et [Me10] indépendamment et ses propriétés ont été plus récemment étudiées dans [La12] et [EsMe11].

Dans la Définition 2.1.4 on a rappelé la notion de fibré Nori semi-stable sur un schéma propre X, connexe et réduit sur un corps k. On notera dorénavant $Ns(X)$ cette catégorie et on se borne au cas d'un corps algébriquement clos. De plus, on fixe un point k-rationnel $x \in X(k)$. Suivant le point de vue de [EsMe11] on observe que $Ns(X)$, munie du produit tensoriel de faisceaux usuel, de l'objet trivial $\mathcal{O}_X$ et du foncteur fibre $x^* : Ns(X) \to k\text{-}mod$ est une catégorie tannakienne neutre sur k et on dénotera par $\pi^S(X, x)$ le k-schéma en groupes qu'on lui associe. C'est donc le S-schéma en groupes qu'on cherchait. Il existe plusieurs descriptions différentes pour $Ns(X)$ qui sont réunies, par exemple, dans [AntMe13] Theorem 1.2, mais se trouvent aussi dans [EsMe11], §1, [La11], Proposition 5.1 et [La12], §1.2. Ici on rappelle, parce qu'on l'utilisera dans la suite, qu'un fibré V est Nori semi-stable si et seulement si il est fortement semi-stable (ce qui veut dire que tout tiré $F_T^{m*}(V)$ par un itéré du Frobenius est encore semi-stable) avec $ch_1(V).H^{d-1} = 0$ et $ch_2(V).H^{d-2} = 0$ où $ch_1(V)$ et $ch_1(V)$ dénotent la première et deuxième classes de Chern et H est un fibré en droites ample. Le Construction ne dépend cependant pas par le fibré H choisi.

Théorème 2.6.1. *Soient X et Y deux schémas réduits, connexes et propres sur un corps algébriquement clos k et fixons des points $x \in X$ et $y \in Y$. Alors le morphisme naturel*

$$\varphi : \pi^S(X \times_k Y, (x, y)) \to \pi^S(X, x) \times_k \pi^S(Y, y)$$

induit par les projections $p_X : X \times_k Y \to X$ et $p_Y : X \times_k Y \to Y$ est un isomorphisme.

Ce théorème se trouve dans [La12], §4 et représente aussi une nouvelle preuve pour le même résultat concernant le schéma en groupes fondamental, rappelé dans §2.2. Cependant il existe une deuxième preuve, moins connue, issue d'une dernière collaboration entre Vikram Mehta et moi même. Voici l'opinion de Vikram sur notre preuve (je cite) :

« *Of course our way of proof, for smooth [varieties, n.d.a.] is very interesting, and we can give a talk at a conference. But publishing it seems doubtful, Langer's result is stronger. What do you think ?* »

Je suis d'accord. Donc on présentera ici quelques idées de ce dernier travail ensemble qui ne sera jamais soumis pour publication. Une version numérique est néanmoins disponible (cf. [AntMe13]). Dans ce qui suit $W := W(k)$ dénotera, comme déjà auparavant, l'anneau des vecteurs de Witt associé à k.

Démonstration. (*du Théorème 2.6.1.*) On suppose X et Y lisses et projectifs et on suit donc [AntMe13]. Pour une preuve plus complète l'article [La12] §4 reste la meilleure référence. On se concentre sur la preuve du fait que φ est une immersion fermée. Si on démontre que pour tout fibré vectoriel Nori semi-stable V sur $X \times_k Y$ alors

$(*)$ $V_{|t_1 \times Y}$ et $V_{|z_1 \times Y}$ sont isomorphes pour toute paire de points $t_1, z_1 \in X$ et, de façon analogue, $V_{|X \times_k t_2} \simeq V_{|X \times_k z_2}$ pour toute paire de points $t_2, z_2 \in Y$.

Si ceci est vrai alors V est contenu dans la catégorie tannakienne engendrée par $V_1 := V_{|t_1 \times Y}$ et $V_2 := V_{|X \times_k t_2}$ ce qui nous permettrait de conclure. Supposons d'abord que X et Y sont deux courbes. Pour tout k-schéma T on dénotera par $F_T : T \to T$ le morphisme de Frobenius absolu et par F_T^n le n-ème itéré de F_T. Un fibré vectoriel V sur X est dit périodique sous l'action du Frobenius (ou Frobenius-périodique) s'il existe un entier positif m tel que $F_T^{m*}(V) \simeq V$. De plus quand T est une courbe lisse et projective on dénotera par $M_T(r)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et degré 0 et quand T est une surface lisse et projective (ici on ne rencontrera que des produits de courbes lisses et projectives) on dénotera par $M_T(r)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels χ-semi-stable de rang r avec classes de Chern nulles (au sens rappelé plus haut dans ces notes). Dans les deux cas $M_T^s(r)$ sera le sous-espace des fibrés vectoriels qui sont stables. Le point clé est de démontrer que $M^s_{X \times_k Y}(r)$ est homéomorphe à $\coprod_{r_1 \cdot r_2 = r} M_X^s(r_1) \times_k M_Y^s(r_2)$ (on ne considère donc que leurs structures d'espaces topologiques). Pour ce faire on se ramène au cas de la caractéristique nulle, en prenant $Z_W \to Spec(W)$ schéma lisse et projectif qui relève $X \times Y$. On sait donc construire l'espace des modules relatif des fibrés vectoriels χ-semi-stables sur Z_W de rang r avec classes de Chern nulles sur Z_W (il suffit de répéter, en dimension relative 2, la construction présentée dans [MeVe08] pour l'espace des modules relatif des fibrés vectoriels semi-stables de rang r et degré 0 sur une courbe) et on peut travailler sur sa fibre générique en caractéristique 0. Puis on transporte le résultat obtenu sur la fibre spéciale (c'est l'objet de [AntMe13], Proposition 2.3). Ça nous permet de prouver que les k-points Frobenius-périodiques sont denses dans $M_{X \times_k Y}(r)$ ([AntMe13], Corollary 2.4) : ça entraîne que tout fibré vectoriel V Nori semi-stable et stable de rang r sur $X \times_k Y$ est approximé par des fibrés vectoriels $\{V_n\}_n$ qui sont Frobenius-périodiques et de rang r. Soient maintenant $p_1 : X \times_k Y \to X$ et $p_2 : X \times_k Y \to Y$ les deux projections. Puisque tout V_n, étant trivialisable par un torseur fini et étale, est isomorphe à $p_1^*(A_n) \otimes p_2^*(B_n)$ où A_n et B_n sont eux aussi des fibrés vectoriels stables et trivialisables par un torseur fini et étale sur X et Y respectivement. Ça prouve la propriété $(*)$ pour V. Si V est Nori semi-stable mais pas stable la propriété $(*)$ suit du fait que tout fibré Nori semi-stable est engendré par ceux qui sont Nori semi-stables et stables ([AntMe13], Lemma 2.5). Pour le cas général (X et Y de dimension quelconque), on peut se ramener au cas des courbes grace à [BiHo05], Theorem 2, qui affirme que si deux fibrés vectoriels sur un schéma lisse et projectif T sur un corps sont isomorphes si restreints à toute courbe C contenue dans T, alors ils sont isomorphes sur T tout entier. $\square$

2.7 Morphismes finis et fibrés vectoriels essentiellement finis

Cette section reste fortement liée à la théorie de Nori, mais les résultats qu'on décrira n'ajouteront aucune information directe sur le schéma en groupes fondamental. Ils vont néanmoins dans la même direction, décrivant le comportement de certain morphismes finis par rapport aux fibrés essentiellement finis. C'est pourquoi on a regroupé ce qui suit dans une section à part, mais toujours au sein du chapitre consacré à la théorie du schéma en groupes fondamental.

2.7.1 Clôture de morphismes essentiellement finis

Cette section ne fait pas exception : on part d'un résultat *classique* (groupe fondamental étale, revêtements galoisiens, ...) et on se demande si on sait le généraliser dans le *nouveau* langage (schéma en groupes fondamental, torseurs, ...). On commence par rappeler l'énoncé *classique*, source d'inspiration d'un travail en collaboration avec Michel Emsalem (voir [AntEm11]), concernant la *clôture Galoisienne* des revêtements étales, finis et connexes :

Théorème 2.7.1. *Soit $f : Y \to X$ un revêtement étale, fini et connexe. Il existe un morphisme $\lambda : \widehat{Y} \to Y$ tel que $f \circ \lambda$ est un revêtement étale, fini et galoisien et tout X-morphisme d'un revêtement étale, fini et galoisien vers X factorise à travers $\widehat{Y}$.*

Démonstration. Voir par exemple [Sz09], Proposition 5.3.9. $\square$

Il faut maintenant *traduire* l'énoncé dans le langage des torseurs. Bien sûr on veut obtenir un résultat qui coïncide avec le Théorème 2.7.1 lorsque X est défini sur un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos (c.a.d. lorsque, ce n'est pas un hasard, le groupe fondamental étale et le schéma en groupes fondamental coïncident). S'il est tout de suite clair que les revêtements étales, finis et galoisiens seront remplacés par une certaine famille de torseurs finis (qu'on appellera *Galoisiens* et qu'on définira dans quelques lignes) il est moins évident par quoi peuvent être remplacés les revêtements étales, finis et connexes. Les remplacer par des morphismes finis (ou finis et plats) étant impossible on a pensé qu'un bon candidat pouvait être la famille des morphismes *essentiellement finis* :

Notation 2.7.2. Soit k un corps. On dira qu'un schéma $T \to Spec(k)$ satisfait aux hypothèses de Nori s'il est réduit, connexe et propre sur k et si $H^0(T, \mathcal{O}_T) = k$.

Définition 2.7.3. Soient k un corps et $X \to Spec(k)$ un schéma qui satisfait aux hypothèses de Nori, muni d'un point $x \in X(k)$. Un morphisme fini et plat $f : Y \to X$ (il est donc automatiquement surjectif) est dit essentiellement fini si $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un fibré vectoriel essentiellement fini.

On observe immédiatement qu'un torseur fini est un morphisme essentiellement fini. Prendre *tous les morphismes essentiellement finis* est cependant encore un peu trop, puisque en caractéristique nulle ça voudrait dire accepter des revêtements étales, finis mais non connexes. Malheureusement prendre tout bêtement *tous les morphismes essentiellement finis connexes* n'est pas encore suffisant. Il faudra demander que Y satisfasse aux hypothèses de Nori en remarquant qu'en caractéristique 0 Y satisfait aux hypothèses de Nori si et seulement si Y est connexe. Une toute dernière définition nous permettra de comprendre l'énoncé qui suivra :

Définition 2.7.4. Soient k un corps et $X \to Spec(k)$ un schéma qui satisfait aux hypothèses de Nori, muni d'un point $x \in X(k)$. Soit G un k-schéma en groupes fini et $u : P \to X$ un G-torseur. On dira que $u : P \to X$ est un torseur *Galoisien*[1] si P satisfait aux hypothèses de Nori et si il existe un point $p \in P_x(k)$ qui fait de P un quotient du $\pi(X, x)$-torseur universel sur X.

Voici enfin le résultat principal prouvé dans [AntEm11] :

Théorème 2.7.5. *Soient k un corps et $X \to Spec(k)$ un schéma qui satisfait aux hypothèses de Nori, muni d'un point $x \in X(k)$. Soient Y un k-schéma qui satisfait aux hypothèses de Nori, $f : Y \to X$ un morphisme essentiellement fini et $y \in Y_x(k)$ un point k-rationnel.*

1. *Il existe un torseur Galoisien $p : \widehat{Y} \to X$, pointé en $\widehat{y} \in \widehat{Y}_x(k)$ sous l'action d'un k-schéma en groupes fini G et un unique morphisme $\lambda : \widehat{Y} \to Y, \quad \widehat{y} \mapsto y$ tel que $f \circ \lambda = p$; de plus λ est fidèlement plat ;*
2. *plus précisément le morphisme $\lambda : \widehat{Y} \to Y$ a une structure de torseur pointé sous l'action du fixateur G_y de y sous l'action de G sur la fibre Y_x ;*
3. *Le schéma $\widehat{Y}$ satisfait à la propriété universelle suivante : pour tout torseur Galoisien T, pointé en $t \in T_x(k)$, sous l'action d'un k-schéma en groupes fini H et tout morphisme fidèlement plat $\mu : T \to Y, \quad t \mapsto y$, il existe un unique morphisme de torseurs pointés (u, φ) où $\varphi : H \to G$ et $u : T \to \widehat{Y}$, rendant commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "\mu"] \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& \widehat{Y} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, two heads, "p"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Au point 1) on a donc construit une *clôture Galoisienne* $\widehat{Y}$ pour le morphisme essentiellement fini $f : Y \to X$ et le troisième point établit le caractère *universel* de telle clôture.

Démonstration. du Théorème 2.7.5 La preuve complète se trouve dans [AntEm11], §3.3. Ici on donnera une trace da la démonstration, en renvoyant à l'article pour plus de détails. On commence par la construction du torseur $p : \widehat{Y} \to X$: par définition $U := f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un fibré essentiellement fini sur X donc il engendre une sous-catégorie tannakienne $EF(X, U)$ de la catégorie tannakienne $EF(X)$ des fibrés essentiellement finis : on dénote par $\pi(X, U, x)$ le k-schéma en groupes affine associé à $EF(X, U)$. C'est un quotient de $\pi(X, x)$. Au moyen de l'équivalence donnée au Théorème 2.1.1 on peut aisément obtenir un $\pi(X, U, x)$-torseur Galoisien. Si on note par $\theta : X \to Spec(k)$ le morphisme structural de X et par $i_U : EF(X, U) \to Qcoh(X)$ le foncteur "inclusion", alors il s'agit du torseur donné par $\underline{Isom}^{\otimes}_X(\theta^* \circ x^*, i_U)$. On pose $G := \pi(X, U, x)$ et $\widehat{Y} := \underline{Isom}^{\otimes}_X(\theta^* \circ x^*, i_U)$ et on a ainsi trouvé le torseur $p : \widehat{Y} \to X$. Le morphisme

1. Dans la littérature il a été appelé *réduit, fortement connexe*, ou encore *Nori-réduit* ou quotient. Il nous a semblé plus convenable de l'appeler Galoisien pour des raisons historiques évidentes.

$\lambda : \widehat{Y} \to Y$ correspond de façon naturelle (cf. [De90], 7.5-7.12) au morphisme $\rho : G \to Y_x$ définit par (en regardant le foncteur des points) $g \mapsto g \cdot y$ (on le retrouve à posteriori en tirant sur $x : Spec(k) \to X$ le morphisme λ). Du fait que ρ est fidèlement plat on déduit que λ est aussi fidèlement plat. Le point 2) suit encore de la correspondance $\rho \leftrightarrow \lambda$ mais ça nécessite une petite astuce déjà utilisée par Nori dans [No76], Lemma (2.2), Lemma (2.3) et Lemma (2.4). Le point 3) est peut être le plus simple et on peut donc l'inclure intégralement dans ces notes : puisque f est affine, f_* est exact ; par conséquent de l'inclusion $\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mu_*(\mathcal{O}_T)$ on obtient l'inclusion $f_*(\mathcal{O}_Y) \hookrightarrow f_*(\mu_*(\mathcal{O}_T)) \simeq g_*(\mathcal{O}_T)$. Étant semi-stable, $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est un sous-objet de $g_*(\mathcal{O}_T)$ et donc un objet de la catégorie tannakienne engendrée par $g_*(\mathcal{O}_T)$, c.a.d. $EF(X, \{g_*(\mathcal{O}_T)\})$. L'inclusion de catégories tannakiennes

$$EF(X, \{f_*(\mathcal{O}_Y)\}) \hookrightarrow EF(X, \{g_*(\mathcal{O}_T)\})$$

est donc un foncteur pleinement fidèle qui induit un morphisme fidèlement plat

$$\sigma : H \twoheadrightarrow \pi_1(X, U, x) =: G$$

entre les deux k-schémas en groupes finis leur associés. Puisque T est le torseur universel associé à la catégorie tannakienne $EF(X, \{g_*(\mathcal{O}_T)\})$, du morphisme σ on obtient un morphisme $u : T \twoheadrightarrow \hat{X}_U$ qui commute aux actions de H et de G. Une preuve analogue à celle du point 2) montre que ce morphisme est lui aussi fidèlement plat. □

Ce résultat généralise donc celui rappelé au Théorème 2.7.1 ; de plus, on se donne un torseur $T \to X$ sous l'action d'un k-schéma en groupes fini G, alors il y a une correspondance entre les sous-schémas en groupes de G et les morphismes essentiellement finis intermédiaire tout à fait analogue à la correspondance galoisienne classique :

Corollaire 2.7.6. *Soient k, X comme dans le Théorème 2.7.5. Soit $g : T \to X$ un torseur Galoisien sous l'action d'un k-schéma en groupes fini H, pointé en $t \in T_x(k)$.*

1. *La correspondance qui associe à chaque morphisme essentiellement fini $f : Y \to X$ pointé en $y \in Y_x(k)$ dominé par g, le fixateur $H_y < H$ est une bijection entre les morphismes essentiellement finis pointés dominés par g, à isomorphisme près, et k-sous-schémas en groupes fermés de H, à conjugaison près.*
2. *De plus, $f : Y \to X$ est un torseur si et seulement si H_y est normal dans H ; dans ce cas c'est un torseur sous l'action du schéma en groupes H/H_y.*

Démonstration. Il s'agit de [AntEm11], Corollary 3.5. □

Le Corollaire 2.7.6 nous permet, par exemple, de determiner tous les morphismes essentiellement finis au dessus d'une variété abélienne : dans [No83], Nori montre, comme on a déjà vu, que le schéma en groupes fondamental d'une variété abélienne A définie sur un corps k est commutatif. Il s'en suit que, d'après le point 2) du corollaire, tout morphisme essentiellement fini $f : Y \to A$ satisfaisant aux hypothèses de Nori est lui même un torseur sous l'action, bien évidemment, d'un schéma en groupes fini et commutatif.

Dans la deuxième partie de [AntEm11] (voir §3.4) on montre que la composée de deux morphismes essentiellement finis est encore essentiellement finie. Cet énoncé utilise [Gar09], mais on a été informé que cet article est sous révision. On présente ici notre résultat en supposant que la structure globale de [Gar09] ne sera pas affectée. Ou, alternativement, on pourra supposer pour notre schéma X que

$(*)$toute tour de torseurs Galoisiens au dessus de X est dominée par un torseur.

Proposition 2.7.7. *Soient k, X comme dans le Théorème 2.7.5. Soit $f : Y \to X$ un morphisme essentiellemet fini de k-schémas. Soit encore Y un k-schéma satisfaisant aux hypothèses de Nori. Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur Y trivialisé par un torseur au dessus de Y sous l'action d'un k-schéma en groupes fini. Alors le faisceau $f_*(\mathcal{F})$ est un fibré essentiellement fini sur X. En particulier si $g : Z \to Y$ est un morphisme essentiellement fini alors $f \circ g$ est encore un morphisme essentiellement fini.*

Démonstration. C'est [AntEm11], Theorem 1.2. □

En effet deux torseurs sont en particulier deux morphismes essentiellement finis et la propriété $(*)$ n'est donc rien d'autre qu'un cas particulier de l'énoncé de la proposition ci-dessus. Si on trouvait une preuve de [AntEm11], Theorem 1.2 indépendante de la propriété $(*)$ il est clair donc qu'elle serait démontrée aussi.

2.7.2 Fibrés trivialisés par morphismes finis

Dans cette section on décrira un résultat issu d'une collaboration avec Vikram Mehta. Si on se donne un schéma X sur un corps k et un fibré vectoriel V sur X il est naturel, lorsque X satisfait aux hypothèses de Nori (cf. Notation 2.7.2) et est muni d'un point $x \in X(k)$, de se demander sous quelles conditions V est essentiellement fini. Bien que la définition de *fibré essentiellement fini* soit plutôt complexe, il existe une caractérisation, qui découle de la nature tannakienne du schéma en groupes fondamental, qui rend un tel fibré immédiatement reconnaissable :

« Un fibré vectoriel sur X est essentiellement fini si et seulement si il existe un k-schéma en groupes fini G et un G-torseur $f : Y \to X$ pointé en $y \in Y_x(k)$ tel que $f^*(V) \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus rg(V)}$ »

ou, plus brièvement, Un fibré vectoriel sur X est essentiellement fini si et seulement si il est trivialisé par un torseur fini. Il est donc tout à fait naturel de se demander si un fibré vectoriel trivialisé par un morphisme fini est essentiellement fini ou pas, la réciproque étant trivialement vrai d'après ce qu'on vient de rappeler.

Tout le long de cette section k sera un corps algébriquement clos. Indranil Biswas et Joao Pedro Dos Santos ont démontré le résultat suivant ([BiDo11] Theorem 1) :

Théorème 2.7.8. *Soit X un k-schéma lisse, connexe et projectif. Soit V un fibré vectoriel sur X. Alors V est essentiellement fini si et seulement s'il existe un schéma Y, un morphisme propre et surjectif $f : Y \to X$, tel que $f^*(V) \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus rg(V)}$.*

Les auteurs de cet article nous montrent que, au moyen de la factorisation de Stein, cet énoncé est équivalent à ce qu'on cherchait, c.a.d. V est essentiellement fini si et seulement s'il existe un schéma Y, un morphisme fini et surjectif $f' : Y' \to X$, tel que $f'^*(V) \simeq \mathcal{O}_{Y'}^{\oplus rg(V)}$ et c'est plutôt sous cette forme qu'on le lira dans la suite. Dans les remarques conclusives à l'article les auteurs observent que le résultat du Théorème 2.7.8 reste vrai si X est normal mais pas lisse mais que lorsque k a caractéristique nulle. La question restait donc ouverte pour X normal mais pas lisse en caractéristique positive. Il vaut mieux préciser que l'énoncé n'est certainement plus vrai, c'est bien expliqué dans [BiDo12], Example 6, si X n'est pas normal. Dans [BiDo12] Biswas et Dos Santos utilisent le Théorème 2.7.8 pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.7.9. *Soit X un k-schéma lisse, connexe et projectif. Soit Y un k-schéma et $f : Y \to X$ un morphisme propre, et surjectif, alors si on se donne un point $x \in X(k)$ la catégorie $\tau_Y(X)$ des fibrés trivialisés par f, munie du foncteur fibre x^* est une catégorie* *tannakienne. Soit $G_{Y/X}$ le k-schéma en groupes affine associé. Supposons que f soit séparable. Alors $G_{Y/X}$ est fini et étale.*

Démonstration. [BiDo12], Theorem 1. □

Ce n'est que dans [AntMe11] que nous démontrons la généralisation suivante :

Théorème 2.7.10. *Soit X un k-schéma* normal*, connexe et projectif. Soit V un fibré vectoriel sur X. Alors V est essentiellement fini si et seulement s'il existe un schéma Y, un morphisme fini et surjectif $f : Y \to X$, tel que $f^*(V) \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus rg(V)}$.*

Démonstration. La preuve complète se trouve dans [AntMe11], Theorem 1.1 ; nous la parcourons ici rapidement. L'argument principal est donné par [AntMe11], Lemma 2.4, où on prouve que si f est séparable alors l'énoncé est vrai. Si f n'est pas séparable on a les deux cas suivants :

1. g est purement inséparable ;
2. g n'est ni séparable ni purement inséparable.

Si on est dans le cas 1) alors il est clair que $car(k) = p > 0$. On a donc le droit de considérer le morphisme absolu de Frobenius $F_X : X \to X$. Du fait que f est purement inséparable on déduit l'existence d'un morphisme $h : X \to Y$ tel que $fh = F_X^n$ (c.a.d. le Frobenius iteré n fois). Mais $f^*(V)$ est trivial sur Y, donc $(fh)^*(V) = (F_X^n)^*(V)$ est trivial ; mais *Frobenius trivial* entraîne que V est essentiellement fini (cf. [MeSu02]).
Même dans le cas 2) on est toujours dans le cas $car(k) = p > 0$. Dans ce cas on sait factoriser $f : Y \to X$ en deux morphismes $s : Y \to Z$ et $t : Z \to X$ où s est séparable et t est purement inséparable. La stratégie de la preuve de [AntMe11], Lemma 2.4 sera rappelée dans le Lemme 2.7.11, qui en est une conséquence dirècte. □

Une conséquence (de la preuve) du Lemme 2.4, d'intérêt indépendant, est donnée par l'énoncé suivant :

Lemme 2.7.11. *Un morphisme fini et surjectif $f : Y \to X$ entre deux k-schémas connexes, normaux et projectifs, étale en dehors d'un ensemble fermé de X de codimension 2, se factorise à travers un revêtement étale Galoisien $f' : Y' \to X$ si et seulement s'il existe un fibré vectoriel non trivial V sur X tel que $f^*(V)$ est trivial sur Y.*

Démonstration. [AntMe11], Lemma 2.5. Voyons la stratégie pour construire Y' : on se réduit d'abord au cas où $K(X) \subset K(Y)$ est normal. Ensuite, suivant les techniques introduites par Balaji et Parameswaran dans [BaPa11], §6, on pose $Y_0 := \mathbf{Spec}\left((g_*(\mathcal{O}_Y)_{\max})\right)_{|X_0}$ où $X_0 \subseteq X$ est un ouvert de $codim_X(X\backslash X_0) \geq 2$ tel que $g_*(\mathcal{O}_Y)_{\max}$ est localement libre. Le morphisme $g_0 : Y_0 \to X_0$ qui en résulte est un revêtement Galoisien étale. Cette information et le Lemme de Kempf nous permettent de dire que si g n'est pas lui même un revêtement Galoisien étale alors il existe un Galoisien de Y' de Y qui trivialise V et qui est, sur X, un revêtement Galoisien étale, prouvant que V est essentiellement fini. □

2.8 Questions ouvertes

Les questions qu'on peut se poser sur la théorie du schéma en groupes fondamental (et ses nombreuses généralisations) sont très nombreuses. Par exemple il serait intéressant de comprendre quels sont les schémas dont le schéma en groupe fondamental de Nori est nul (ce qui entraîne, il faut le rappeler, que son S-schéma en groupes fondamental est nul aussi, [EsMe11], Theorem 1.2 ou [La12], Corollary 8.3). Ou encore il serait intéressant d'étudier les schémas qui ont schéma en groupes fondamental non nul mais group fondamental étale nul ; il n'y a que très peu d'exemples à présent (on nous a signalé le cas des surfaces d'Enriques en caractéristique 2). On présentera ici quelques idées, parmi lesquelles quelques-unes déjà à l'étude.

2.8.1 Le cas non réduit

Dans cette section on expliquera quelques tentatives dans le but de construire un objet classifiant les torseurs finis au dessus d'un schéma non réduit. On a déjà rappelé que dans [Zh13], Zhang a montré que si k est un corps de caractéristique positive p, alors sur le schéma α_p (on peut même oublier sa structure de groupe) on ne peut pas construire le schéma en groupes fondamental ou, ce qui revient au même, la catégorie des torseurs finis et pointés au dessus de α_p n'est pas cofiltrée. Cependant au lieu de prendre la catégorie de tous les torseurs on peut décider de se borner à la catégorie des torseurs Galoisiens :

Définition 2.8.1. Soit k un corps et soient $X \to Spec(k)$ un morphisme de schémas muni d'une section $x \in X(k)$. Soit G un k-schéma en groupes pro-fini et $u : P \to X$ un G-torseur pointés en $p \in P_x(k)$; on le notera (P, G, p). On dira que (P, G, p) est un torseur *Galoisien* si pour tout autre triplet (T, H, t), tout morphisme de torseurs $T \to P, t \mapsto p$ est fidèlement plat. La catégorie de tous les torseurs Galoisiens au dessus de X sera dénotée par $\mathcal{G}(X)$.

Remarque 2.8.2. Si X satisfait aux hypothèses de Nori (voir Notation 2.7.2) alors les torseurs finis qui se trouvent dans $\mathcal{G}(X, x)$ sont les torseurs Galoisiens au sens de la Définition 2.7.4.

Il reste à comprendre si et quand la catégorie $\mathcal{G}(X)$ est cofiltrée. En fait déjà pour des cas très simple (par exemple $X := Spec(k[x]/x^2)$, lorsque $car(k) = 2$) la catégorie $\mathcal{G}(X)$ n'est pas cofiltrée. Dans [Ant11] on a prouvé des résultats d'un certain intérêt mais les conclusions qu'on en a tirées sont erronées. Une réinterprétation de ces résultats porte à l'existence d'un objet défini dans ce qui suit :

Définition 2.8.3. On dit que X a un pseudo-schéma en groupes fondamental si il existe un k-schéma en groupes $\aleph(X, x)$ et un $\aleph(X, x)$-torseur $\widehat{X} \to X$, pointé en $\widehat{x} \in \widehat{X}_x(k)$ tel que $(\widehat{X}, \aleph(X, x), \widehat{x})$ est un objet de $\mathcal{G}(X)$ qui peut être exprimé comme limite projective de tous les objets de $\mathcal{G}(X)$. Le triplet $(\widehat{X}, \aleph(X, x), \widehat{x})$ sera appelé le pseudo-torseur universel.

Un tel objet, qui n'est pas forcément unique, satisfait néanmoins à la propriété suivante : soient $(\widehat{X}, \aleph(X, x), \widehat{x})$ et $(\widehat{X}', \aleph(X, x)', \widehat{x}')$ deux pseudo-torseurs universels alors il existe deux morphismes fidèlement plat $(\widehat{X}, \aleph(X, x), \widehat{x}) \to (\widehat{X}', \aleph(X, x)', \widehat{x}')$ et $(\widehat{X}', \aleph(X, x)', \widehat{x}') \to (\widehat{X}, \aleph(X, x), \widehat{x})$. Si, en particulier $\aleph(X, x)$ est fini alors tous les pseudo torseurs universels sont isomorphes (mais pas à un unique isomorphisme près en général).

Si X est réduit et connexe alors il résulte de la théorie de Nori que $\aleph(X, x) = \pi(X, x)$.

Un tel objet reste donc un outil important pour classifier les torseurs finis au dessus d'un schéma donné X et pour éventuellement récupérer certaines propriétés du schéma X même, dont le fait d'être réduit, par exemple. De plus, l'absence d'hypothèses contraignantes sur X nous permet une certaine liberté qui n'était pas possible auparavant, même si, bien sûr, avoir un pseudo-schéma en groupes fondamental n'est pas aussi *joli* que d'avoir un schéma en groupes fondamental.

On devrait maintenant pouvoir aisément réinterpréter un résultat obtenu dans [Ant11] dans ce nouveau langage. On supposera donc désormais que pour tout X sur un corps k on sait construire un pseudo-schéma en groupes fondamental :

Théorème 2.8.4. *Soient X un schéma affine et connexe sur un corps k pointé en $x \in X(k)$ et X_{red} sa partie réduite. Alors quel que soit le "représentant" $\aleph(X,x)$ qu'on choisit pour le pseudo-schéma en groupes fondamental de X en x, le morphisme*

$$\psi : \pi(X_{red}, x) \to \aleph(X,x)$$

induit par l'inclusion $X_{red} \hookrightarrow X$ est une immersion fermée.

On remarque tout de suite que ce résultat est optimal : il suffit de prendre $X = \alpha_p$, $x = 0_{\alpha_p}$ alors on construit facilement un α_p-torseur non trivial au dessus de X à l'aide de [Mi80], III, §4, ce qui entraîne $\aleph(X,x) \neq \{1\}_k$. Mais on sait que $\pi(X_{\mathrm{red}}, x) = \pi(Spec(k), Spec(k)) = \{1\}_k$.

On se demande maintenant si un énoncé analogue à celui présenté dans le Théorème 2.8.4 soit encore vrai lorsque X n'est plus affine. Par exemple si X_{red} est une courbe projective et lisse est-il encore vrai que $\psi : \pi(X_{\mathrm{red}}, x) \to \aleph(X,x)$ est une immersion fermée ? Comme on a déjà vu il y a très peu de chances que ψ puisse être un isomorphisme en caractéristique $p > 0$. Ce qui est en contraste avec la théorie classique du groupe fondamental étale ([SGA1], I, Théorème 8.3). Une lueur d'espoir pour que ψ puisse être un isomorphisme reste lorsque $\mathcal{O}_X(X) = k$. Il y a toute une famille de schémas non réduits ayant sections globales constantes : ce sont les torseurs finis Galoisiens au dessus d'un schéma T, réduit, connexe et ayant sections globales constantes.

2.8.2 Construction tannakienne relative

Dans cette section on décrira brièvement un travail en cours, fruit d'une collaboration avec Michel Emsalem. Dans §2.1.4 on a rappelé une construction *tannakienne* due à Mehta et Subramanian (voir aussi [MeSu13]) pour le schéma en groupes fondamental d'un schéma lisse et projectif X défini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W := W(k)$ où k est un corps algébriquement clos de caractéristique positive p. Cette construction utilise la théorie tannakienne sur anneaux de Prüfer introduite par Wedhorn dans [We04]. La construction présentée dans [MeSu13] donne lieu à un schéma en groupes fondamental de X non pas défini sur W mais sur la clôture intégrale $\overline{W}$ de W dans la clôture algébrique $\overline{K}$ de $K := Frac(W)$. Bien que très intéressant cette restriction peut présenter quelques ennuies lorsque on veut par exemple étudier le comportement du schéma en groupe fondamental après changement de base, etc.. On va esquisser notre programme en quelques lignes :

1. ne plus se borner à W comme anneau de base mais, par exemple, accepter aussi anneaux de valuation discrète R d'égale caractéristique positive p et, si possible considérer même le cas où R n'est pas complet, pour se rapprocher le plus possible de la construction donnée dans §2.1.3 du schéma en groupes fondamental (quasi-fini) ;
2. faire en sorte que la construction envisagée donne lieu à un schéma en groupes sur R et non pas sur sa clôture intégrale $\overline{R}$ dans la clôture algébrique $\overline{Frac(R)}$;
3. généraliser la construction aux torseurs quasi-finis au dessus de X, ce qui n'est pas le cas dans [MeSu13].

On rappelle, simplifiant, (voir donc §2.1.4 pour une définition plus précise et plus de détails) que Mehta et Subramanian ont défini un fibré vectoriel V sur X comme étant essentiellement fini si ses tirés sur les fibres spéciale et générique de X sont essentiellement finis, au sens défini par Nori. Il existe plusieurs autres candidats pour une bonne catégorie sur X qui sont tous à l'étude. On rappelle ici un candidat plutôt simple qui semble, à présent, donner quelques réponses satisfaisantes à nos questions :

Définition 2.8.5. Soit R un anneau de valuation discrète complet et X un schéma propre sur $Spec(R)$, muni d'un point $x \in X(R)$ et tel que la fibre générique X_η et spéciale X_s satisfassent aux hypothèses de Nori. On appelle alors *essentiellement fini* tout fibré vectoriel sur X qui est trivialisé par un torseur fini au dessus de X.

On observe tout de suite que si un fibré vectoriel V sur X est essentiellement fini au sens de la Définition 2.8.5 alors il l'est aussi au sens de la définition donnée par Mehta et Subramanian. On estime par contre que ce nouveau point de vue nous permettra de ne pas étendre les scalaires et d'obtenir donc un réseau tannakien $\tau(X)$ (ou quasi-tannakien) au sens précisé à la section 2.1, dont le schéma en groupes associé $\pi_{\tau(X)}(X, x)$ est défini sur R et non sur $\overline{R}$. Ça répondrait donc déjà à une bonne partie des points composant le programme présenté plus haut. Il resterait à considérer le cas où R n'est pas complet et à s'occuper du point 3), à savoir de trouver une catégorie tannakienne dont le schéma en groupes associé est le schéma en groupes fondamental quasi-fini, à savoir $\pi^{\mathrm{qf}}(X, x)$.

Dans §3.2.5 on énoncera une conjecture concernant $\pi^{\mathrm{qf}}(X, x)$, dont l'importance sera plus claire après avoir introduit et étudié la question de l'extension des torseurs.

2.8.3 Variété elliptiquement connexes par chaînes

Dans [Ca97] Campana a prouvé que si une variété V complexe satisfait à la propriété que toute paire de points $x, y \in V(\Omega)$, où Ω est un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{C}$, est connexe par une chaînes de variétés dont le groupe fondamental (topologique) est virtuellement abélien, alors il en est de même du groupe fondamental de V. Il est naturel de se demander si une propriété analogue reste vraie pour le schéma en groupes fondamental lorsque on considère des variétés sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive. Une première approche est suggérée par les techniques utilisées dans §2.5. Les difficultés qu'on trouve quand on cherche à adapter la même stratégie à ce nouveau cas nous ont fait réduire le champ action de notre recherche aux variétés qui sont connexes par des chaînes de courbes elliptiques.

Chapitre 3

Modèles de schémas en groupes et de torseurs

Dans ce chapitre on décrira certains *modèles* d'objets définis sur un corps. Il faudra tout de suite préciser ce que l'on entend par modèle : si S est un schéma de Dedekind (qui sera toujours connexe pour nous) et $\eta = Spec(K)$ son point générique alors un modèle pour un schéma $T \to Spec(K)$ est un schéma $U \to S$ tel que $U \times_S Spec(K) \simeq T$. De façon très générale pour T il y a plein de modèles (par exemple T même, vu comme S-schéma) mais si on demande que, par exemple, $U \to S$ soit surjectif, ou surjectif et plat alors le nombre de modèles diminue énormément au fur et à mesure qu'on ajoute des conditions. Si, en plus, T a une structure supplémentaire (par exemple *schéma en groupes*) et on demande que $U \to S$ garde cette structure alors le nombre de modèles diminue et il faut commencer à ce demander si un tel U existe ou pas. Supposons par exemple que $T \to Spec(K)$ soit un schéma en groupes fini et supposons de vouloir chercher un modèle U comme ci-dessus qui soit un S-schéma en groupes fini et plat ; on sait bien, dans ce cas, que notre recherche peut être vaine parce que, en générale, ce modèle pourrait bien ne pas exister (ce phénomène est décrit dans le cas où $S = Spec(R)$, R étant un anneau de valuation discrète, dans [Mi86], Appendix B, Proposition B.2, pour R d'égale caractéristique et dans [Ra74], §3.4 pour R de caractéristique mixte). Les objets dont on a étudié les modèles sont à présent les schémas en groupes finis et les torseurs sous l'action de schémas en groupes finis pour lesquels nous renvoyons le lecteur aux sections 3.1 et 3.2, respectivement.

3.1 Produit amalgamé de schémas en groupes

L'étude des modèles de schémas en groupes finis est très d'actualité. Les questions qu'on se pose sont multiples. Soient S un schéma de Dedekind, $\eta := Spec(K)$ son point générique et G un K-schéma en groupes fini. On a déjà mentionné le problème de l'existence de modèles pour des schémas en groupes et on a déjà rappelé qu'un modèle fini et plat pour G en général n'existe pas. Cependant un modèle quasi-fini existe toujours : il suffit de plonger G dans $GL_{n,K}$ et d'en considérer la clôture schématique dans $GL_{n,S}$. Si en plus G est lisse on peut aussi se demander si on sait trouver un modèle lisse. Si S est le spectre d'un anneau semi-local ce problème peut être brillamment résolu à travers la méthode de la lissification (voir [Ana73], Chapitre II) : on choisit un modèle M pour G (n'importe lequel) et après un nombre fini d'éclatements de Néron de M ([BoLüRa80], §3.2) on trouve certainement un modèle quasi-fini et lisse M' pour G. Il faut observer une fois de plus que M' en général n'est pas fini. Une fois qu'on a des modèles pour G et qu'on a décidé lesquels nous intéressent on peut essayer de les classifier tous. C'est l'objet notamment de [To10] et [MéRoTo13] où les modèles finis et plats de μ_{p^n} ont été étudiés lorsque R est un anneau de caractéristique résiduelle positive.

Supposons maintenant que M_1, M_2, M_3 sont trois modèles de G. Si on a deux morphismes modèles $M_1 \to M_3$ et $M_2 \to M_3$ (ce qui revient à dire que génériquement ce sont des isomorphismes) on sait bien sûr construire un quatrième modèle U de G qui clôture le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[dr] & & M_3 \arrow[dl] \\ & M_2 & \end{tikzcd}$$

Il s'agit bien évidemment de la clôture schématique de G dans le produit fibré $M_1 \times_{M_3} M_2$ (qui n'est pas plat en général, d'où la nécessité de prendre la clôture schématique). Le S-schéma U est donc le *produit fibré* $U := M_1 \sqcap_{M_3} M_2$ ou *produit cartésien* dans la catégorie des modèles finis et plats de G. Réciproquement on peut se demander s'il existe un produit amalgamé dans cette même catégorie. On inverse les flèches : on se donne trois modèles de G, M_1, M_2, M_3 et deux morphismes modèles $M_3 \to M_1$ et $M_3 \to M_2$. On se demande si on sait construire un quatrième modèle P de G qui clôture le diagramme suivant et qui soit le *plus petit possible* (la propriété universelle usuelle du produit co-cartésien) avec cette propriété :

$$\begin{tikzcd} & M_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd}$$

Si un tel P existe on l'appellera *produit amalgamé* et on le notera $P := M_1 \sqcup_{M_3} M_2$. Si M_1, M_2, M_3 sont commutatifs, finis et plats, une solution a été suggérée par Raynaud dans [Ra74] : il suffit de considérer les duaux de chaque M_i puis de construire le produit fibré $U := M_1^\vee \sqcap_{M_3^\vee} M_2^\vee$; son dual de Cartier $U^\vee$ sera le produit amalgamé $M_1 \sqcup_{M_3} M_2$ souhaité. Si G n'est plus commutatif la question se complique. C'est l'objet de [Ant12] qu'on décrira ici de suite. La question qu'on s'est posée dans [Ant12] est légèrement plus complexe et elle sera précisée dans l'énoncé suivant :

Théorème 3.1.1. *Soient R un anneau de valuation discrète complet, M_1, M_2, M_3 trois R-schémas en groupes finis et plats. Soient u et v deux morphismes de schémas en groupes comme dans le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & M_3 \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ M_1 & & M_2 \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

où v est un morphisme modèle (ce qui revient à dire, on le rappelle une fois de plus, que v_η est un isomorphisme). Alors le produit amalgamé du diagramme 3.1 dans la catégorie des R-schémas en groupes affines et plats existe : c'est un R-schéma en groupes fini et plat, génériquement isomorphe à $M_{1,\eta}$.

Démonstration. Il s'agit de [Ant12], Theorem 3.2. Ici on rappelle la stratégie. On s'est d'abord inspiré au cas commutatif rappelé ci-dessus : dans le cas commutatif on a vu qu'il suffit de considerer les duaux de Cartier de M_1, M_2, M_3, d'inverser donc les flèches du diagramme 3.1, de calculer le produit fibré du diagramme qui en résulte et de prendre le dual de Cartier de ce dernier. En termes d'algèbres, pour tout $i = 1, 2, 3$, $M_i := Spec(A_i)$ où A_i est une R-algèbre de Hopf commutative et co-commutative. Il est clair que le module dual $A_i^\vee$ de A_i possède de façon naturelle une structure de R-algèbre de Hopf commutative et co-commutative ce qui nous permet de conclure que $Spec(A_i^\vee)$ a lui aussi une structure de R-schéma en groupes. Si les $M_i := Spec(A_i)$ ne sont plus commutatifs alors les R-algèbres A_i, qui sont bien sûr commutatives, ne sont plus co-commutatives. Ça entraîne que chaque module dual $A_i^\vee$ a une structure de R-algèbre co-commutative mais pas commutative en général. Si toutefois on arrive à construire le produit amalgamé A du diagramme

$$\begin{tikzcd} & A_3^\vee \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_1^\vee & & A_2^\vee \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

on peut espérer que le dual $A^\vee$ de A soit une R-algèbre de Hopf commutative (mais pas forcément co-commutative). C'est effectivement ce qu'on prouve et R-schéma en groupes (fini et plat) $Spec(A^\vee)$ nous permet de conclure. □

Si nos R-schémas en groupes "finis et plats" ne sont plus finis et plats mais quasi-finis et plats on ne peut pas procéder comme dans la preuve du Théorème pour la bonne et simple raison que, si on note encore $M_i := Spec(A_i)$ le double dual $A_i^{\vee\vee}$ de A_i n'est pas du tout isomorphe à A_i et cette propriété a été largement utilisée dans le cas fini. On peut néanmoins se ramener au cas fini en considérant la *partie finie* de chaque M_i, donnée, justement, par $Spec(A_i^{\vee\vee})$. L'énoncé qu'on sait prouver pour le cas quasi-fini est le suivant :

Théorème 3.1.2. *Soient R un anneau de valuation discrète complet, M_1, M_2, M_3 trois R-schémas en groupes quasi-finis et plats. Soient u et v deux morphismes de schémas en groupes comme dans le diagramme (3.1) où v est un morphisme modèle. On suppose de plus que $M_{1,\eta}$ admet un modèle fini et plat. Alors le produit amalgamé du diagramme 3.1 dans la catégorie des R-schémas en groupes affines et plats existe : c'est un R-schéma en groupes quasi-fini et plat, génériquement isomorphe à $M_{1,\eta}$.*

Démonstration. Il s'agit de [Ant12], Theorem 3.5. □

3.2 Extension de torseurs

Cette section sera consacrée au problème de l'extension des torseurs. On décrira le problème, ensuite on parcourra les résultats les plus importants donnant une réponse partielle au problème, en partant des premières idées dues à Grothendieck pour conclure avec nos contributions. Une partie de ces contributions sont une conséquence directe de résultats déjà présentés dans le Chapitre 2 : on expliquera les liens évidents (et ceux moins évidents) avec la théorie du schéma en groupes fondamental, puis on décrira des techniques plus récentes.

3.2.1 Description du problème

La définition de torseur a été rappelée dans §2.1, on se plonge donc dans la description du problème. Soient S un schéma de Dedekind de point générique $\eta = Spec(K)$ et X un S-schéma de fibre générique X_η. Soient encore G un K-schéma en groupes affine et de type fini et Y un G-torseur au dessus de X_η comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "G"'] & \\ X_\eta \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \eta \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

On se demande s'il existe un S-schéma en groupes affine et plat G' de type fini et un G'-torseur $Y' \to X$ qui soit génériquement isomorphe au G-torseur $Y \to X_\eta$ donné, comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed] \arrow[d, "G"'] & Y' \arrow[d, dashed, "G'"] \\ X_\eta \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \eta \arrow[r] & S \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Le problème, énoncé sous cette forme très vague, est certainement faux en générale : il suffit de trouver un schéma X et un fibré vectoriel V sur X_η qui ne s'étend pas sur X, par quoi on entend qu'il n'existe aucun fibré W sur X tel que $W_{|X_\eta} \simeq V$. En vertu de la correspondance bijective

$$\{\text{fibrés vectoriels sur } X\} - \{GL_{n,K} - \text{torseurs au dessus de } X\}$$

(rappelée par exemple dans [GöWe10], §(11.6)) il s'ensuit qu'il existe au moins un GL_{X_η}-torseur au dessus de X_η qui ne s'étend pas en un GL_X-torseur au dessus de X. De plus, ce n'est pas sous cette forme que le problème a été formulé par Grothendieck dans [SGA1], où pour la première fois cette question a été abordée. L'idée de Grothendieck et ses premières intuitions seront rappelées dans §3.2.2. Chronologiquement ça représente donc une première solution au problème mentionné ci-dessus. Les questions qu'on peut se poser quand on étudie les modèles des torseurs sont nombreuses. En voilà quelques-unes pour mieux préciser le but de nos efforts. Au lieu de suivre un ordre chronologique on va essayer de donner cette liste de questions selon un ordre qui nous a paru le plus logique possible :

Question 3.2.1. Si dans le diagramme 3.3 on demande que G soit fini, est-il possible de trouver un S-schéma en groupes affine et plat G', modèle de G, et un G'-torseur $Y' \to X$ qui soit génériquement isomorphe au G-torseur $Y \to X_\eta$?

Lorsque la Question 3.2.1 admet une solution il est clair que G' ne sera pas forcément fini puisque un S-schéma en groupes quasi-fini et plat G' peut bien sûr faire l'affaire. Si G admet un modèle fini (on a déjà rappelé, en début du Chapitre 3, que ce n'est pas toujours le cas) alors on a bien évidemment le droit de se poser la question suivante :

Question 3.2.2. Si dans le diagramme 3.3 on demande que G soit fini, est-il possible de trouver un S-schéma en groupes fini et plat G', modèle de G, et un G'-torseur $Y' \to X$ qui soit génériquement isomorphe au G-torseur $Y \to X_\eta$?

On veut aller plus loin et étudier le cas où G est lisse :

Question 3.2.3. Si dans le diagramme 3.3 on demande que G soit fini et étale, est-il possible de trouver un S-schéma en groupes fini et étale G', modèle de G, et un G'-torseur $Y' \to X$ qui soit génériquement isomorphe au G-torseur $Y \to X_\eta$?

Prenons $S = Spec(R)$ où R est un anneau de valuation discrète de caractéristique mixte $(0,p)$ alors Grothendieck dans [SGA1] avait déjà remarqué, il y a bien longtemps, que pour certains schémas abéliens $X \to S$ et pour certains $m \in \mathbb{N}$ multiples de p, le morphisme *multiplication par* m, $m_{X_\eta} : X_\eta \to X_\eta$, est bel et bien un torseur fini étale mais le morphisme *multiplication par* m, $m_X : X \to X$, qui répond pourtant à la question 3.2.2, pourrait cependant ne pas être étale. Dans ce cas, puisque tout torseur au dessus de X, modèle de $m_{X_\eta} : X_\eta \to X_\eta$, est dominé par $m_X : X \to X$, on déduit qu'aucun torseur, parmi les modèles de m_{X_η}, n'est étale. On connaît des exemples encore plus simples où la Question 3.2.3 n'admet pas de réponse positive : c'est le cas notamment de la droite affine $X := Spec(R[x])$, où R est un anneau de valuation discrète de caractéristique positive 2 ; si on cherche on modèle du $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_K$-torseur $Y := Spec\frac{K[z,x]}{z^2+z+\pi^{-1}x}$, π étant une uniformisante de R, alors on note que Y admet un modèle fini (il en admet en fait un nombre infini) donné par $Y' := Spec(\frac{R[z,x]}{z^2+\pi z+\pi x})$ mais il n'admet aucun modèle fini étale. En effet, comme dans l'exemple précédent, tous les autres torseurs, modèles de $Y \to X_\eta$ sont dominés par $Y' \to X$ et donc pas lisses. Malgré ces deux tentatives infructueuses le nombre de réponses positives aux questions ci-dessus est important, comme on verra dans la suite. La prochaine et dernière question coïncide pratiquement avec le problème qu'on a énoncé en début de cette discussion informelle. Le rappeler ci-dessous nous aidera à avoir une liste complète sous les yeux :

Question 3.2.4. Si dans le diagramme 3.3 on demande que G soit affine et de type fini, est-il possible de trouver un S-schéma en groupes affine, de type fini et plat G', modèle de G, et un G'-torseur $Y' \to X$ qui soit génériquement isomorphe au G-torseur $Y \to X_\eta$?

On a déjà vu que cette question peut facilement avoir des réponses négatives. Cependant dans §3.2.5 on discutera une idée récente qui nous permettra de pouvoir considérer tout G-torseur, pour G schéma affine et de type fini quelconque.

On va maintenant parcourir les solutions existantes en commençant par l'énoncé de Grothendieck.

3.2.2 Premières solutions

L'origine du problème remonte aux années '60 et plus précisément c'est une question symbiotiquement liée à la théorie de la spécialisation du groupe fondamental étale dont on a déjà discuté (voir §2.2). Il suffit donc de réinterpréter le Théorème 2.2.1. Pour tout groupe abstrait fini Γ et tout anneau commutatif unitaire A avec Γ_A on dénotera le schéma en groupes fini naturellement associé à Γ :

Théorème 3.2.5. *Soit R un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel algébriquement clos de caractéristique positive p et de corps des fractions K. Soit X un schéma propre sur $Spec(R)$ ayant fibres générique X_η géométriquement réduite et* *fibre spéciale X_s réduite, alors pour tout groupe abstrait fini Γ d'ordre non divisible par p, tout Γ_K-torseur au dessus de X_η s'étend en un Γ_R-torseur au dessus de X quitte à étendre les scalaires.*

Démonstration. C'est une relecture du point 2) du Théorème 2.2.1. □

Pour se reperer dans le diagramme (3.3) on observe bien sûr que $G = \Gamma_K$ et $G' = \Gamma_R$ et $S = Spec(R)$. L'expression *quitte à étendre les scalaires*, veut tout simplement dire que si le torseur donné ne s'étend pas en un torseur au dessus de X alors il existe toutefois une extension finie $K \subset K'$ telle que, si R' est la clôture intégrale de R dans K' et on tire le diagramme (3.3) sur $Spec(R')$, alors le torseur donné, tiré sur $X \times_R K'$, peut être étendu en un torseur au dessus de $X \times_R R'$ (cette expression sera utilisée souvent dans la suite avec une signification analogue).

Mais puisque on parle de torseurs et on a *oublié* les revêtements, on peut déduire, du Théorème 3.2.5, la conséquence suivante :

Corollaire 3.2.6. *Soit R un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel algébriquement clos de caractéristique positive p et de corps des fractions K. Soit X un schéma propre sur $Spec(R)$ ayant fibres générique X_η géométriquement réduite et fibre spéciale X_s réduite, alors pour tout K-schéma en groupes fini et étale G d'ordre non divisible par p, tout G-torseur au dessus de X_η s'étend en un G'-torseur au dessus de X, quitte à étendre les scalaires, où G' est un R-schéma en groupes fini et étale génériquement isomorphe à G.*

Démonstration. Ça suit du Théorème 3.2.5 et du fait que tout K-schéma en groupes fini et étale devient constant après extension des scalaires. □

Ce premier résultat donne déjà une réponse très satisfaisante dans beaucoup de cas. Plus précisément il donne une réponse positive aux questions 3.2.2 et 3.2.3. Ensuite les mathématiciens ont commencé à se demander si on savait dire quelque chose pour le cas $p||G|$: si $S = Spec(R)$ comme dans le Théorème 3.2.5 et X une courbe lisse et propre sur S alors Raynaud suggère une solution, quitte à étendre les scalaires, pour $|G| = p$ ([Ra90], §3) ; un problème analogue a été affronté par Saïdi dans [Sa03], §2.4 pour des courbes formellesde type fini et $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_K$; pour une étude plus vaste il faudra attendre les années 2000.

3.2.3 Le cas commutatif

Ce n'est qu'en 2008 qu'on a une solution de caractère général, notamment concernant tous les schémas en groupes finis et commutatifs. Si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet R de caractéristique mixte $(0, p)$ Tossici dans [To08] a donné une solution assez général à la question 3.2.2. Plus précisément :

Théorème 3.2.7. *Soient S le spectre d'un anneau de valuation discrète complet R de caractéristique mixte $(0, p)$ et X un schéma normal et fidèlement plat sur R avec fibres générique et spéciale intègres. Alors pour tout K-schéma en groupes G fini et commutatif, tout G-torseur Y au dessus de X_η s'étend en un G'-torseur au dessus de X, quitte à étendre les scalaires, où G' est un R-schéma en groupes fini et commutatif génériquement isomorphe à G, lorsque la normalisée de X dans Y a fibre spéciale intègre.*

Démonstration. C'est [To08], Corollary 4.2.8. □

Notre contribution est une conséquence directe du Théorème 2.3.3, où on a décrit l'abélianisé du schéma en groupes fondamental :

Théorème 3.2.8. *Soient S un schéma de Dedekind, X un schéma intègre, $f : X \to S$ un morphisme de type fini et fidèlement plat muni d'une section $x : S \to X$ et tel que $\mathcal{O}_S \simeq f_*(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme universel. On suppose que $\mathbf{Alb}_{X/S}$ et $\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S}$ existent; alors tout torseur $Y \to X_\eta$ fini, commutatif et Galoisien au dessus de la fibre générique de X, pointé au dessus de x_η s'étend en un torseur $Y \to X$ fini et commutatif, pointé en x.*

Démonstration. C'est [Ant10], Theorem 3.10. On esquisse ici la preuve dans le cas, plus simple, où $\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S} = 0$. En effet si $\mathbf{NS}^{\tau}_{X/S} = 0$ alors d'après le Théorème 2.3.3 $\pi^{\mathrm{ab}}(X,x) \simeq \pi(\mathbf{Alb}_{X/S}, 0_{\mathbf{Alb}_{X/S}})$. On procède donc comme suit : dire que $Y \to X_\eta$ est fini, commutatif et Galoisien revient à dire que G est un quotient de $\pi^{\mathrm{ab}}(X,x)$ donc il existe un G-torseur $T \to \mathbf{Alb}_{X_\eta/\eta}$ tel que $T \times_{\mathbf{Alb}_{X_\eta/\eta}} X_\eta$ est isomorphe au torseur donné. Mais d'après le Théorème 2.2.3 il existe un G'-torseur $T' \to \mathbf{Alb}_{X/S}$ tel que $T' \times_{\mathbf{Alb}_{X/S}} \mathbf{Alb}_{X_\eta/\eta}$ est isomorphe au G-torseur T pour un certain S-schéma en groupes G'. Le tiré de T' sur X est le torseur souhaité : c'est un G' torseur fini et commutatif qui étend $Y \to X_\eta$. $\square$

Par rapport au Théorème 3.2.7 on a donc considéré le cas où le schéma de Dedekind S n'est pas forcément le spectre d'un anneau de valuation discrète. De plus, ça inclut le cas où le corps des fonctions de S a caractéristique positive. On s'est libéré aussi de la condition sur la fibre spéciale de la normalisé de X dans Y et on n'a pas besoin d'étendre les scalaires. Le prix à payer est la restriction aux torseurs pointés. Si on veut réintroduire les torseurs non pointés alors il suffit de remarquer que *quitte à étendre les scalaires* tout torseur devient pointé (dans ce cas quelques restrictions sur S sont néanmoins nécessaires). De plus, on a déjà énoncé, sans le justifier, une coséquence importante de notre Théorème 3.2.8 : il s'agit du Corollaire 2.3.5, dont la preuve est maintenant claire, qui met en relation la fibre générique du schéma en groupes fondamental de X avec le schéma en groupes fondamental de la fibre générique X_η de X.

3.2.4 Le cas résoluble

Comme promis dans l'introduction on ne donnera ici que quelques détails sur les techniques utilisées après avoir enoncé le résultat principal. Cette section sera donc très courte. La raison est simple : la preuve de ce théorème se base essentiellement sur [Gar09], mais on a été prevenu que cet article est sous révision (c'est en fait le même problème qui avait partiellement affecté la section §2.7.1).

Théorème 3.2.9. *Soit X un schéma lisse et de dimension absolue 2 au dessus d'un anneau de valuation discrète complet R de corps résiduel de caractéristique $p > 0$, algébriquement clos et de corps des fractions K. Soit G un K–schéma en groupes fini, étale, et résoluble de longueur 2 ou d'ordre p^n. De plus soit $Y \to X_\eta$ (X_η étant la fibre générique de X) un G-torseur connexe, muni d'un point K–rationnel $y \in Y(K)$. Alors, éventuellement après extension des scalaires, il existe un R-schéma X' et un morphisme modèle $X' \to X$ (c.a.d. génériquement un isomorphime), un R-schéma en groupes fini et résoluble G' et un G'-torseur $Y \to X$ qui étend le torseur donné.*

Démonstration. Il suffit de considérer $Y \to X_\eta$ comme tour de torseurs commutatifs, puis utiliser les résultats d'extension de torseurs commutatifs obtenus dans §3.2.3 pour obtenir une tour de torseur commutatifs au dessus de X (ou d'un modèle X') qui étend

$Y \to X_\eta$. À l'aide de [Gar09] on trouve un torseur qui domine la tour et qui étend le torseur donné. $\square$

La difficulté principale est représentée par les hypothèses très restrictives que le schéma X doit satisfaire pour qu'on puisse y étendre des torseurs commutatifs. Si pour X on se débrouille en ajoutant les hypothèses nécessaires, il n'est pas aussi simple de retrouver ces mêmes hypothèses à chaque étage de notre tour de torseurs commutatifs. C'est pourquoi on a besoin de modifier X en le remplaçant par un modèle X'.

3.2.5 Problèmes ouverts

Le cas général

Dans §2.8.2 nous avons promis une conjecture concernant le schéma en groupes fondamental "quasi-fini" $\pi^{\mathrm{qf}}(X,x)$ (défini dans 2.1.3). Le moment est venu de l'énoncer :

Conjecture 3.2.10. *Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel algébriquement clos de caractéristique positive et de corps des fractions K. Soit X une courbe lisse et connexe, séparée et surjective sur S. Alors il existe un S-schéma X', obtenu de X après un nombre fini d'éclatements de Néron tel que tout torseur fini sur X_η peut être étendu en un torseur quasi-fini au dessus de X' quitte à étendre les scalaires.*

Si on pousse la conjecture plus loin on peut espérer que $X' = X$ et c'est en gardant cet espoir qu'on discute la suite. Bien sûr une telle conjecture peut être formulée pour X de dimension quelconque mais à l'état actuel on n'a pas suffisamment d'éléments pour pouvoir l'énoncer. Il est par contre probable que si une telle conjecture est vraie alors elle resterait vrai pour les torseurs pointés sans besoin d'étendre les scalaires. Une telle reformulation nous permettrait de traduire la Conjecture 3.2.10 en termes de schéma en groupes fondamental :

« Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel algébriquement clos de caractéristique positive et de corps des fractions K. Soit X une courbe lisse, connexe, pointée en $x \in X(S)$, séparée et surjective sur S. Alors

$$\pi(X_\eta, x_\eta) \to \pi^{\mathrm{qf}}(X', x)_\eta$$

est un isomorphisme. »

Pour les courbes elliptiques (ainsi que les variétés abéliennes) ces conjectures sont vraies. Un autre espoir sera décrit dans la section §3.2.5.

Modèles de torseurs sur espaces affines

On garde toujours les notations du diagramme 3.3 où on se met dans le cas particulier suivant : on suppose $S = Spec(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète et $X := \mathbb{A}^n_R = Spec(R[x])$ l'espace affine de dimension n. On espère prouver le résultat suivant, dont on a déjà beaucoup d'éléments qui penchent en sa faveur :

Théorème 3.2.11. *Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète (complet) R de corps des fractions K. Soit $X = \mathbb{A}^n_R$. Soit G un K-schéma en groupes affine de type fini et $f : Y \to \mathbb{A}^n_K$ un G-torseur. Alors il existe un point un S-schéma en groupes affine G', plat et de type fini, modèle de G, et un G'-torseur $f' : Y' \to \mathbb{A}^n_R$ qui étend le G-torseur Y donné.*

Nos espoirs reposent sur les faits suivants :

◇ on prouve d'abord que $f : Y \to \mathbb{A}^n_K$ s'étend sur X', obtenu après un nombre fini d'éclatements de Néron de X en l'origine :

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[d, "f'"] & \\
Y \arrow[ur] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[dr, bend left, "\lambda"] \arrow[ddr, dashed] & \\
\mathbb{A}^n_K \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{A}^n_R \arrow[d] \\
\eta \arrow[rr] & & S
\end{tikzcd}$$

◇ on montre qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{A}^n_R \to X'$.

Ce résultat prouverait en plus, pour $\mathbb{A}^n_R$, la conjecture du paragraphe précedant, à savoir le morphisme canonique :

$$\pi(\mathbb{A}^n_K, 0) \to \pi^{\mathrm{qf}}(\mathbb{A}^n_R, 0)_\eta$$

est un isomorphisme. Ça montre aussi l'importance d'avoir introduit le schéma en groupes fondamental quasi-fini, qui semble mieux se conduire aux restrictions aux fibres génériques et spéciales.

Bibliographie

[Ana73] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*. Mémoires de la S. M. F., tome 33, 5-79 (1973).

[Ant09] M. Antei, *Comparison between the fundamental group scheme of a relative scheme and that of its generic fiber*, Journal de théorie des nombres de Bordeaux, Tome 22, no 3 (2010), p. 537-555.

[Ant13] M. Antei, *Extension of finite solvable torsors over a curve*, Manuscripta Mathematica, Volume 140, Issue 1 (2013), Page 179-194.

[Ant10] M. Antei, *On the abelian fundamental group scheme of a family of varieties*, Israel Journal of Mathematics, Volume 186 (2011), 427-446.

[Ant12] M. Antei, *Pushout of quasi-finite and flat group schemes over a Dedekind ring*, Journal of Algebra, Volume 371, 1 December 2012, Pages 314-328.

[Ant11] M. Antei, *The fundamental group scheme of a non reduced scheme*, Bulletin des Sciences Mathématiques, Volume 135, Issue 5, July-August 2011, Pages 531-539.

[Ant15] M. Antei, *On the bumpy topology and the fundamental group scheme*, soumis.

[AntBi15] M. Antei, I. Biswas, *On the fundamental group scheme of rationally chain connected varieties*, Int Math Res Notices (2015), doi : 10.1093/imrn/rnv132.

[AntEm11] M. Antei, M. Emsalem, *Galois Closure of Essentially Finite Morphisms*, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 215, Issue 11, November 2011, Pages 2567-2585.

[AntEmGa15] M. Antei, M. Emsalem, C. Gasbarri, *Sur l'existence du schéma en groupes fondametal*, arXiv :1504.05082v2 [math.AG] .

[AntMe12] M. Antei, V. B. Mehta : *On the Grothendieck-Lefschetz theorem for a family of varieties.* Bulletin des Sciences Mathématiques, Volume 136, Issue 4, June 2012, Pages 423-431.

[AntMe13] M. Antei, V. B. Mehta : *On the product formula for the S-fundamental group scheme*, 2013, ma page personnelle.

[AntMe11] M. Antei, V. B. Mehta : *Vector bundles over normal varieties trivialized by finite morphisms.* Archiv der Mathematik, Volume 97, Issue 6 (2011), Page 523-527

[BaPa11] V. Balaji, A. J. Parameswaran, *An Analogue of the Narasimhan-Seshadri Theorem and some Applications*, J. Topol. 4 (2011), no. 1, 105-140.

[Bi09] I. Biswas, On the fundamental group-scheme, *Bull. Sci. Math.* **133** (2009), 477–483.

[BiDo11] I. Biswas, J. P. Dos Santos, *Vector bundles trivialized by proper morphisms and the fundamental group scheme*, J. Inst. Math. Jussieu 10, No. 2, 225-234 (2011).

[BiDo12] I. Biswas, J. P. Dos Santos, *Vector bundles trivialized by proper morphisms and the fundamental group scheme, II*, Contributions in Mathematical and Computational Sciences. Volume 2, 2012, pp. 77-88

[BiHo05] I. Biswas, Y. I. Holla, *Principal bundles whose restriction to curves are trivial*, Math. Z. 251, 607-614 (2005).

[BiHo07] I. Biswas, Y. Holla, *Comparison of fundamental group schemes of a projective variety and an ample hypersurface*, Journal of Algebraic Geometry, 16 (2007), No. 3, 547-597.

[BiPaSu06] I. Biswas, A. J. Parameswaran, S. Subramanian, *Monodromy group for a strongly semistable principal bundle over a curve*, Duke Math. J. 132 (2006), 1-48.

[BoVi] N. Borne, A. Vistoli , *The Nori fundamental gerbe of a fibered category*, Journal og Algebraic Geometry (à paraitre).

[BoLüRa80] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud *Néron models*, Springer Verlag, (1980).

[Ca97] Connexité abélienne des variétés kählérieimes compactes, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics Volume 325, Issue 7, October 1997, Pages 755 ?758

[CL03] A. Chambert-Loir, *À propos du groupe fondamental des variétés rationnellement connexes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2003), arXiv :math/0303051v1 [math.AG].

[De90] P. Deligne, *Catégories Tannakiennes*, in *The Grothendieck Festschrift*, Vol II, Birkhäuser, (1990), 111-195.

[DeMi82] P. Deligne, J. S. Milne, *Tannakian Categories*, in *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, Lectures Notes in Mathematics 900, Springer-Verlag, (1982), 101-227.

[Do07] J. P. Dos Santos, *Fundamental group schemes for stratified sheaves.* Journal of Algebra, Volume 317, Issue 2, pp. 691-713 (2007).

[EsMe11] H. Esnault, V. B. Mehta, *Weak density of the fundamental group scheme*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 13, 3071-3081.

[EsHa08] H. Esnault, P. H. Hai, *The fundamental groupoid scheme and applications*, Annales de lŠInstitut Fourier 58 (2008) 2381-2412.

[Gar09] M. A. Garuti, *On the "Galois closure" for Torsors.*, Proc. Amer. Math. Soc. 137, 3575-3583 (2009).

[Gas03] C. Gasbarri, *Heights of vector bundles and the fundamental group scheme of a curve*, Duke Math. J. 117, No.2, 287-311 (2003).

[GöWe10] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic geometry I. Schemes. With examples and exercises.* Advanced Lectures in Mathematics. Wiesbaden : Vieweg+Teubner

[EGA I] A. Grothendieck, *Éléments de géomérie algébrique.* I. *Le langage des schémas.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, 4, (1960).

[EGA IV.2] A. Grothendieck, *Éléments de géomérie algébrique.* IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas.* 2, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 24, (1965).

[EGA IV.3] A. Grothendieck, *Éléments de géomérie algébrique.* IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas.* 3, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 28, (1966).

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie, (1960-61).

[SGA2] A. Grothendieck, *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. **2**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1968.

[Gr59] A. Grothendieck, *Géométrie formelle et géométrie algébrique*, Séminaire Bourbaki, t. 11, n° 182, (1958-59).

[Ha77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM, Springer Verlag (1977)

[Il05] L. Illusie *Grothendieck's Existence Theorem in Formal Geometry*, in *Fundamental algebraic geometry : GrothendieckŠs FGA explained.* Mathematical Surveys and Monographs 123. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) 2005.

[Kl05] S. L. Kleiman, *The Picard Scheme*,in *Fundamental algebraic geometry : GrothendieckŠs FGA explained.* Mathematical Surveys and Monographs 123. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) 2005.

[La11] A. Langer, *On the S-fundamental group scheme*, Annales de l'institut Fourier, 61 no. 5 (2011), p. 2077-2119.

[La12] A. Langer, *On the S-fundamental group scheme II*, J. Inst. Math. Jussieu, Volume 11, Issue 04, October 2012, pp 835-854

[Li02] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Science Publications (2002)

[Me11] V. B. Mehta, *Some Further Remarks on the Local Fundamental Group Scheme*, arXiv :1111.1074v1 [math.AG]

[Me10] V. B. Mehta, *Some remarks on the local fundamental group scheme and the big fundamental group scheme*, 2010, unpublished manuscript.

[MeSu02] V. B. Mehta, S. Subramanian, *On the fundamental group scheme*, Invent. math. 148, 143-150 (2002)

[MeSu13] V. B. Mehta, S. Subramanian, *The fundamental group scheme of a smooth projective variety over a ring of Witt vectors*, J. Ramanujan Math. Soc, 28 A (Special Issue-2013) 341-351.

[MeVe08] V. B. Mehta, T. E. Venkata Balaji, *Singularities of Moduli Spaces of Vector Bundles over Curves in Characteristic* 0 *and* p, Michigan Math. J. 57 (2008), 37-42.

[MéRoTo13] A. Mézard, M. Romagny, D. Tossici, *Models of the group schemes of roots of unity*, Ann. Inst. Fourier 63, no. 3 (2013), 1055-1135

[Mi80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, (1980).

[Mi86] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Mathematics, 1. Academic Press, Inc., Boston, MA, (1986).

[No76] M. V. Nori, *On the representations of the fundamental group*, Compositio Matematica, Vol. 33, Fasc. 1, (1976). p. 29-42.

[No82] M. V. Nori, *The fundamental group-scheme*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol. 91, Number 2, (1982), p. 73-122.

[No83] M. V. Nori, *The Fundamental Group-Scheme of an Abelian Variety*, Math. Ann. 263, (1983), p. 263-266.

[Pa07] C. Pauly, *A smooth counterexample to NoriŠs conjecture on the fundamental group scheme*, Proc. Am. Math. Soc. 135, No. 9, 2707-2711 (2007).

[Ra90] M. Raynaud, *p-groupes et réduction semi-stable des courbes*, The Grothendieck Festschrift, Vol III, Progr. Math., vol. 88, Birkhäuser, Boston, MA, (1990), p. 179-197.

[Ra74] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type* $(p, \dots, p)$, Bulletin de la Société Mathématique de France, 102 (1974), p. 241-280.

[Sa03] M. Saïdi, *Torsors under finite and flat group schemes of rank p with Galois action*, Math. Zeit. 245, no. 4 (2003), p. 695-710.

[Sh74] T. Shioda, *An example of unirational surfaces in characteristic* p, Math. Ann. **211** (1974), 233–236.

[St14] A. Stäbler, *On base change of the fundamental group scheme*. Math. Z. 277, No. 1-2, 305-316 (2014).

[Sz09] T. Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 117. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[To08] D. Tossici, *Effective Models and Extension of Torsors over a d.v.r. of Unequal Characteristic*, International Mathematics Research Notices (2008) Vol. 2008 : article ID rnn111, 68 pages (2008).

[To10] D. Tossici, *Models of* μ_{p^2} *over a discrete valuation ring*. With an Appendix of X. Caruso. Journal of Algebra, Volume 323, n. 7, p. 1908-1957, 2010

[Vi05] A. Vistoli, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, in *Fundamental algebraic geometry : GrothendieckŠs FGA explained.* Mathematical Surveys and Monographs 123. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) 2005.

[Wa79] W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes*, GTM, Springer-Verlag, (1979).

[We04] T. Wedhorn, *On Tannakian duality over valuation rings*. J. Algebra 282, No. 2, 575-609 (2004).

[Zh13] L. Zhang, *Nori's Fundamental Group over a non Algebraically Closed Field*, arXiv :1303.4079 [math.AG]