



HAL
open science

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUADRIDIMENSIONNELS APPLICATIONS À LA PHYSIQUE

Noël Dahan, Jean Claude Sisson

► **To cite this version:**

Noël Dahan, Jean Claude Sisson. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUADRIDIMENSIONNELS APPLICATIONS À LA PHYSIQUE : Intrinsic expression of Maxwell's equations in Special Relativity. Rapport interne 261 - ENS LMT CACHAN, ENS Cachan. 2004, pp.35. hal-04293325

HAL Id: hal-04293325

<https://hal.univ-cotedazur.fr/hal-04293325>

Submitted on 18 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET TECHNOLOGIE

(E.N.S. de Cachan / C.N.R.S. / Université Paris 6)

***Opérateurs différentiels
quadri-dimensionnels***

Applications à la Physique

Noël DAHAN & Jean Claude SISSON

Rapport interne n° 261

LMT-Cachan

Décembre 2004

61, avenue du Président Wilson – 94235 CACHAN CEDEX (France)

Tel. : 33 (0) 1 47 40 22 38 – Fax : 33 (0) 1 47 40 22 40

e-mail : direction@lmt.ens-cachan.fr - http : // www.lmt.ens-cachan.fr

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUADRIDIMENSIONNELS

APPLICATIONS À LA PHYSIQUE#

Noël DAHAN* - Jean Claude SISSON**

* LMT. ENS de Cachan/Université Paris VI. 61 Av. du Pdt Wilson - 94235 Cachan Cedex.

Tel: 01 47 40 22 41. Fax: 01 47 40 22 40. dahan@lmt.ens-cachan.fr

** U.T.C- Divergent-Rond point Guy Daniélou- 60200 Compiègne. jc.sisson@wanadoo.fr

Résumé – Nous allons montrer une façon simple de construire les opérateurs différentiels utiles en Physique Mathématique. Nous montrerons que ces opérateurs sont définis de façon intrinsèque. Tous les opérateurs différentiels classiques de l'espace tridimensionnel sont supposés connus, car c'est à partir de leurs connaissances, que nous effectuerons l'extension aux espaces quadridimensionnels. Nous construisons les nouveaux espaces par le produit cartésien de l'espace tridimensionnel et d'un espace de dimension un (qui est souvent le corps des réels: \mathbf{R}). Deux types d'espace sont traités en parallèle; un quadri-espace de signature elliptique et un quadri-espace de signature hyperbolique (Univers). Le passage de l'un à l'autre est effectué par le biais d'une involution de cyclique d'ordre 2. En fait, le lecteur pourra suivre la construction de l'ensemble de ces opérateurs quadridimensionnels sans grande difficulté. Nous montrerons l'intérêt de cette étude sur quelques problèmes particuliers: la Relativité restreinte, les équations microscopiques de Maxwell...

Abstract – We will show a way simple to build the useful differantials operators Mathematical Physics. We will show that These operators are defined in an intrincci way. All traditional differentials operators of three dimensional space are supposed to be known, because it is starting from their knowledge that will carry out the expansion to four-dimensionals spaces. We create new spaces by the cartesian product of three-dimensional and a space of dimension 1(real body: \mathbf{R}) . Two types of space are treated in parallel, an elliptic quadri-space of signature and hyperbolic quadri-space of signature (Universe). The connection of these two spaces is carried out by the means of a cyclic involution (order 2). In fact, the reader will be able to follow without much difficult the creation of the whole of these four-dimensional operators. We will show the interest of this study on particular problems : Restreint Relativity, Maxwell's microscopic equations...

Présenté par les auteurs pour la première fois au CITV 2000 à Givet. Mis à jour juin 2007.

SOMMAIRE

I - INTRODUCTION	4
II - RAPPELS	4
Différentielles et dérivées	5
II-1 Différentiation du premier ordre	5
Gradient	5
Divergence	6
Extension de la divergence	6
Rotationnel	7
II-2 Différentiation du second ordre	8
Les Laplaciens	9
Vecteur associé à la divergence d'un opérateur "dérivé" de E	9
Vecteur associé à la divergence d'un opérateur anti-auto-adjoint	9
III - CONSTRUCTION D'ESPACES QUADRI-DIMENSIONNELS	10
Introduction	10
Définitions des propriétés de l'espace affine: \dot{F}	11
Définitions des propriétés de l'espace affine: Univers: \mathcal{U}	11
IV - OPERATEURS DIFFERENTIELS QUADRI-DIMENSIONNELS	12
IV-1 Différentiation du premier ordre	12
Le gradient	13
La divergence	13
Vecteur associé à la Divergence d'un endomorphisme	14
IV-2 Différentiation du second ordre	15
Les Laplaciens	15
Vecteur associé à la divergence d'un opérateur "dérivé"	17
Vecteur associé à la divergence d'un opérateur "dérivé" anti-auto-adjoint	17
V - APPLICATIONS	19
Fil conducteur de la physique contemporaine	19
V-I Un aperçu de la relativité restreinte	21
Analyse algébrique de la relativité restreinte	21
Digression	23
Analyse différentielle	24
Étude cinématique de la particule	25
Vecteur quantité de mouvement d'une particule	26
Le principe fondamental de la mécanique relativiste	26
Le théorème de l'énergie puissance	27
V-II Aspect covariant des équations de Maxwell	28
Le vecteur courant d'Univers d'une particule	29
Potentiel vecteur électromagnétique d'Univers d'une particule	30
VI - CONCLUSIONS	31
VII - BIBLIOGRAPHIE	32
ANNEXE	34

- I - INTRODUCTION

Cette notion d'opérateur différentiel est très ancienne (Newton, Leibniz...). Elle permet de définir des opérateurs (scalaires vecteurs, covecteurs, endomorphismes, tenseurs,...), à partir de champs continus et dérivables (au moins plusieurs fois de classe C^α), en tout point d'un domaine fixé à l'avance. La notion de dérivation entraîne toujours la connaissance d'un antécédent (souvent connu sous le nom de potentiel). Ce type d'opération "dérivée" a été et est utilisé dans toutes les branches (au sens large) de la "Physique".

En 1972, les auteurs ont suivi avec succès le cours de "Calcul Tensoriel" enseigné par le professeur Jérôme Chastenet de Géry à l'Institut de Mathématiques Appliquées CNAM - Paris (dirigé par le professeur A. Avez). Ils ont ensuite pris la relève dès 1976 (de Jérôme Chastenet de Géry) au sein du Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris pour les travaux dirigés jusque dans les années 88. Puis l'un des auteurs^{**} en qualité de professeur a repris l'enseignement de ce cours [**CdG-72**] tandis que l'autre perfectionnait les travaux dirigés.

Notre étude est très ancienne (Juin 1974), elle représente notre travail personnel sur la covariance des équations de la physique dans l'espace-temps. Elle sert d'application du cours en fin d'année scolaire dès l'année 1976 (Cours et Travaux Dirigés de "Calcul tensoriel" CNAM - Paris de 1976 à 2001 enseignés par les auteurs). Bien qu'elle soit très ancienne, nous souhaitons la présenter ici. Parce qu'elle montre les mécanismes généraux de construction des champs dérivés, et peut donner lieu à d'autres développements par des lecteurs intéressés devant effectuer une analyse intrinsèque dans leurs recherches.

Nous supposerons que les opérateurs différentiels usuels en dimension 3 sont bien connus. Cependant, nous reviendrons sur le "rotationnel"; opérateur particulier lié à la dimension de l'espace de la géométrie classique, il pourra être remplacé avantageusement par un opérateur plus général [**Dah-74**], [**Val-77**]. Nous éviterons l'utilisation de l'opérateur "nabla": ∇ , qui, en fin de compte, n'est pas utile pour l'analyse.

Nous utiliserons la notion de différentielle au sens de Fréchet (différentielle forte) ou au sens de Gâteaux (différentielle faible). Si l'application "dérivée" au sens de Gâteaux est linéaire (plus facile à traiter et ne nécessite pas de notion de norme), alors elle est l'application "dérivée" au sens de Fréchet. Nous utiliserons dans notre étude la différentielle de Gâteaux, tant que la dérivée sera une "bonne" application linéaire. Néanmoins s'il arrivait pour des raisons particulières qu'il soit nécessaire d'utiliser la différentielle forte, nous le ferons.

Nous montrons, qu'il est possible (sans trop d'effort) de construire des opérateurs différentiels dans un espace de dimension 4, à partir de ceux connus en dimension 3. Certes, une fois la construction faite, nous valoriserons son intérêt sur des applications suivantes: La Relativité Restreinte et Les Équations Microscopiques de Maxwell...

- II – RAPPELS

En général, nous utiliserons les notions d'espace affine: \dot{E} , de son espace vectoriel associé: E , de covecteur de E et de contravecteur de E (application linéaire associée à un quelconque vecteur de E) [**CdG-72**].

Soit \dot{E} un espace affine et E son \mathbf{K} - espace vectoriel associé de dimension fini "n". E est muni d'un couplage interne symétrique régulier: $g_E \in \mathcal{L}(E, E^*)$ g_E [CdG-72], [Dah-74], [Sis-74], [Val-77], cette application définit sur E la notion de produit scalaire. Par hérédité, l'espace vectoriel des endomorphismes de E est muni aussi d'un couplage interne symétrique régulier: $g_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(E)^*)$, par suite, $\mathcal{L}(E)$ est muni d'un produit scalaire (voir en annexe 0 [Dah-2000]). Ce dernier couplage est très utilisé (sans le dire) par un grand nombre de "Mécaniciens" dans un cas particulier. En effet, ils parlent souvent de "double contraction" de tenseurs symétriques pour définir un scalaire pouvant représenter, une énergie ou une puissance.

Il est plus facile de travailler avec des applications linéaires (endomorphismes par exemple) disposant d'un couplage interne associé, plutôt que d'utiliser des applications bilinéaires à valeurs dans le corps \mathbf{K} (ou tenseurs), dont la double contraction dépend de l'ordre suivant les propriétés des applications choisies.

Différentielles et dérivées

Soit un ouvert Ω de \dot{E} et soit une application: " φ " définie dans Ω à valeurs "h" dans un espace affine \dot{H}

$\forall \begin{matrix} \varphi : \Omega & \text{-----} & \dot{H} \\ m \in \Omega & \text{-----} & \varphi(m) = h \end{matrix}$	(II-1)
---	--------

Nous dirons que l'application " φ " est différentiable en $m \in \Omega$, si

$\forall \delta m \in E \Rightarrow \delta h = \varphi'(m)(\delta m) = \mathfrak{D}(\varphi)(m).(\delta m)$ <p style="text-align: center; margin: 0;"><i>avec</i> $\varphi'(m) \in \mathcal{L}(E, H)$</p>	(II-2)
--	--------

S'il n'y a pas d'ambiguïté, le résultat précédent s'écrit de façon plus connue sous le nom de différentielle "physicienne".

$\forall \delta m \in E \Rightarrow \delta h = \frac{\partial h}{\partial m}(\delta m) \quad \text{avec} \quad \varphi'(m) = \frac{\partial h}{\partial m}$	(II-3)
---	--------

N'oublions pas que $\varphi'(m)$ dépend de l'application: " φ " et de m , ce qui semble correct, mais n'est pas visible de façon immédiate dans l'écriture $\frac{\partial h}{\partial m}$.

Définition - La relation $\varphi'(m)(\delta m)$ est désignée comme étant *la différentielle* de " φ " en m suivant δm , tandis que $\varphi'(m)$ est *la dérivée* de " φ " au point m .

- II-1 Différentiation du premier ordre

LE GRADIENT

Soit une application différentiable " α " définie dans Ω et à valeurs "s" dans le corps \mathbf{K} (scalaires)

$\forall \begin{matrix} \alpha : \Omega & \text{-----} & \mathbf{K} \\ m \in \Omega & \text{-----} & \alpha(m) = s \end{matrix}$	(II-4)
--	--------

La différentielle est donnée par:

$$ds = \alpha'(m)(dm) = \frac{\partial s}{\partial m}(dm) \text{ avec } \alpha'(m) \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K}) = E^*$$

Puisque E est muni d'un produit scalaire: g_E , il existe alors un vecteur "x" de E tel que:

$$g_E(x)(dm) = \alpha'(m)(dm) = \frac{\partial s}{\partial m}(dm)$$

Il existe une relation entre $g_E(x)$ et $\frac{\partial s}{\partial m}$. En effet, nous avons

$$g_E(x) = \frac{\partial s}{\partial m} = \alpha'(m).$$
(II-5)

Ici $x \in E$ dépend de l'application α du point m et du couplage: g_E . Puisque g_E est un couplage régulier, la forme de x est connue. En effet, nous avons le résultat général, puis, en utilisant la notion d'adjoint:

$$\underline{x} = g_E^{-1}(\alpha'(m)) = \overline{\alpha'(m)} = \frac{\overline{\partial s}}{\partial m} \in \mathcal{L}(\mathbf{K}, E)$$
(II-6)

Définition - Le gradient du champ α à valeurs scalaires au point m est un vecteur de E donné par la relation

$$\text{grad}_m(\alpha) = g_E^{-1}(\alpha'(m)) = \frac{\overline{\partial s}}{\partial m}(1) \stackrel{\text{abus}}{=} \text{grad}_m s = \underline{x}(1) = x$$
(II-7)

LA DIVERGENCE

Soit une application différentiable "β" définie dans Ω et à valeurs "y" dans l'espace affine: \dot{E}

$$\forall m \in \Omega \text{ -----} \dot{E}$$

$$\text{-----} \beta(m) = y$$

La différentielle est donnée par

$$dy = \beta'(m)(dm) = \frac{\partial y}{\partial m}(dm) \text{ avec } \beta'(m) = \frac{\partial y}{\partial m} \in \mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$$
(II-8)

Définition - La divergence du champ β au point m est un scalaire et, est défini par la trace de l'endomorphisme $\beta'(m)$ de E. Nous avons le résultat

$$\text{div}_m \beta \stackrel{\text{def}}{=} \text{trace}(\beta'(m)) = \text{trace}\left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)$$
(II-9)

EXTENSION DE LA DIVERGENCE

Nous avons vu la définition générale de l'opération de divergence, la question se pose ; c'est d'appliquer cette opération à un champ de vecteur un peu plus complexe, par exemple le champ de vecteur "z" défini par : $f(y)$ où "f" et "y" sont respectivement champ d'endomorphisme et un champ de vecteur. Nous avons en utilisant la notion de différentielle

$$\text{div}_m z \stackrel{\text{def}}{=} \text{trace}\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right) = [\text{Div}_m(f)](y) + \text{trace}\left(f \cdot \frac{\partial y}{\partial m}\right)$$

$$\text{Div}_m(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n S_i^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial m}(S_i) \in E^*$$
(II-10)

LE ROTATIONNEL

Les deux précédents objets ne sont pas liés à la dimension de l'espace. nous pouvons dire que ces deux définitions sont assez générales. Par contre, il existe une opération de dérivation qui dépend de la dimension de l'espace, elle est appelée le **rotationnel**. Nous choisissons de définir cette opération dans un espace vectoriel de dimensions trois (cadre classique). Ce choix est intéressant parce que la dimension de l'espace des applications linéaires anti-auto-adjointes de cet espace est la même que l'espace lui-même: E.

$$\begin{array}{l} \gamma : \Omega \text{ -----} > E \\ \forall \quad m \in I \text{-----} > \gamma(m) = z \\ \text{La différentielle} \Rightarrow dz = \gamma'(m)(dm) = \text{avec } \gamma'(m) = \frac{\partial z}{\partial m} \in \mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E) \end{array} \quad (\text{II-11})$$

Pour cela nous savons qu'à tout champ différentiable "γ" défini sur un ouvert Ω de \dot{E} à valeurs vectorielles dans: E (E est muni d'un produit scalaire; c'est-à-dire E est muni de la notion d'adjoint), il est possible de disposer, à partir de l'application dérivée de deux applications linéaires: $\gamma'(m)$ et $\overline{\gamma'(m)}$. Dès lors, nous connaissons le **rotationnel** de l'application "γ" en un point courant m de \dot{E} . En effet, nous donnons maintenant la définition du **rotationnel**.

Définition - Le **rotationnel** du champ "γ" à valeurs vectorielles au point m est un vecteur de E donné par la relation

$$\text{rot}_m(\gamma) = J_E^{-1}(\gamma'(m) - \overline{\gamma'(m)}) = J_E^{-1}\left(\frac{\partial z}{\partial m} - \overline{\frac{\partial z}{\partial m}}\right) = \text{rot}_m(z) \in E \quad (\text{II-12})$$

Cette relation de dérivation est particulière à la dimension trois de l'espace considéré, grâce à la relation (II-10). Nous utilisons pour cela un champ de divergence d'un vecteur (démonstration dont on connaît le résultat) défini à partir du produit vectoriel de deux champs de vecteurs. Cela mettra en valeur cette nouvelle façon d'écrire le champ **rotationnel**. En particulier, quand on effectuera l'extension à l'espace quadridimensionnel. Nous allons voir cela, moyennant la divergence d'un champ représentant le produit vectoriel des champs: h, μ tels que $x(m) = J_E(h(m))(m(m))$ est égale à divergence adjointe d'opérateurs anti-auto-adjoints (si $\dim(E) = 3$). Ce type de divergence a déjà utilisé [Dah-74],[Val-77].

Les champs à valeurs vectorielles

$$\eta(m) = \mathbf{u}; \quad \mu(m) = \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \xi(m) = \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{=} J_E(\mathbf{u})(\mathbf{w})$$

La différentielle est donnée par

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial m} \cdot (d\mathbf{m}) = \left[\left\{ J_E(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial m} \right\} - \left\{ J_E(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \right\} \right] (d\mathbf{m}) \quad (\text{II-13})$$

La divergence du champ "y" est classiquement suivant la relation (II-9)

$$\text{div}_m(J_E(\mathbf{u})(\mathbf{w})) = \text{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial m}\right) = g_E(\text{rot}_m(\mathbf{u}))(\mathbf{w}) - g_E(\text{rot}_m(\mathbf{w}))(\mathbf{u})$$

Le résultat précédent permet en utilisant la relation (II-10) une autre forme

$$\text{div}_m(J_E(\mathbf{u})(\mathbf{w})) = \text{Div}_m(J_E(\mathbf{u}))(\mathbf{w}) - \text{Div}_m(J_E(\mathbf{w}))(\mathbf{u})$$

En effet, ils sont en liaison directe avec les champs de divergence d'endomorphisme "anti auto adjoint" de E (qui seront d'une grande utilité dans le cadre quadridimensionnel). Par identification, nous avons les résultats

$$\begin{aligned} \text{Div}_m(\mathbf{J}_E(\mathbf{u})) &= \mathbf{g}_E(\text{rot}_m(\mathbf{u})) \Rightarrow \mathbf{g}_E^{-1}(\text{Div}_m(\mathbf{J}_E(\mathbf{u}))) = \text{rot}_m(\mathbf{u}) \\ \text{Div}_m(\mathbf{J}_E(\mathbf{w})) &= \mathbf{g}_E(\text{rot}_m(\mathbf{w})) \Rightarrow \mathbf{g}_E^{-1}(\text{Div}_m(\mathbf{J}_E(\mathbf{w}))) = \text{rot}_m(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

Remarques - Il est toujours possible de parler de "**rotationnel**" dans un espace vectoriel: E de dimension supérieure à trois. En effet, le "rotationnel" d'un champ " γ " est à valeurs vectorielles dans E. Or, utiliser comme nous l'avons fait précédemment, la partie anti-auto-adjointe de l'application linéaire dérivée: $\gamma'(m)$, laquelle appartient à un espace vectoriel: $\mathcal{L}_a(E;E)$ de dimension égale à $\frac{n(n-1)}{2}$ ne permet pas de disposer d'un champ "**rotationnel**" unique à valeurs vectorielles. Puisque la dimension de cet espace est supérieure à la dimension "n" de E (dès que $\dim(E) > 3$). Ces deux espaces ne sont pas isomorphes.

Néanmoins, nous utiliserons cette notion dans le cadre quadridimensionnel, afin de montrer l'intérêt des notions classiques de potentiel vecteur et de potentiel scalaire.

- II-2 Différentiation du second ordre

Nous avons vu précédemment l'intérêt de la première différentiation. En effet, elle met en valeur les particularités, exemple - l'obtention au sens large d'un tenseur d'ordre 1 à partir d'un tenseur d'ordre 0, c'est le cas du gradient d'un champ scalaire - le cas de la divergence d'un champ à valeurs vectorielles qui permet l'obtention d'un tenseur d'ordre 0 à partir d'un tenseur d'ordre 1. Nous avons montré quelques particularités liées à la divergence d'un opérateur (tenseur d'ordre 2) qui réduit l'ordre d'une unité du tenseur résultant.

Nous allons nous intéresser à des champs à valeurs scalaires ou vectorielles qui sont obtenus par une différentiation du second ordre. En fait, nous connaissons cela depuis bien longtemps dans le cadre tridimensionnel, comme le Laplacien d'un champ scalaire ou vectoriel. Cependant, il existe des subtilités [CdG-72] dans les définitions dont nous allons présenter maintenant les propriétés.

Nous avons précédemment défini deux champs, vu dans les relations respectives (II-4) et (II-8); c'est-à-dire - le champ à valeurs scalaires: α - le champ à valeurs vectorielles: β . Dès la connaissance de ces champs, les champs dérivés nous permettent d'accéder aux objets suivants

$$\begin{aligned} \text{grad}_m(\alpha) = \text{grad}_{ms} &= \frac{\overline{\partial s}}{\partial m}(1) \in E \\ \beta'(m) = \frac{\partial y}{\partial m} \in \mathcal{L}(E) &\Rightarrow \overline{\beta'(m)} = \frac{\overline{\partial y}}{\partial m} \in \mathcal{L}(E) \end{aligned} \quad (\text{II-15})$$

Dans la relation (II-15) nous avons trois champs dérivés, le premier dépend de α et de "m" est à valeurs vectorielles dans E, tandis que les deux autres dépendent de β et de "m" sont à valeurs dans l'espace des endomorphismes de E. Ces trois champs sont suffisants pour décrire les opérations différentielles que nous souhaitons présenter.

LES LAPLACIENS

Le Laplacien à valeurs scalaires

Définition - Le Laplacien du champ " α " est la divergence du champ à valeurs vectorielles données par $\text{grad}_m \alpha$ au point " m ". Ce nouveau champ dérivé s'écrit de la façon suivante:

$$\overline{\text{div}(\text{grad})(\alpha)(m)} = \overline{\text{div}_m(\text{grad}_m s)} = \Delta(\alpha)(m) = \Delta_m s \in \mathbf{K} \quad (\text{II-16})$$

Le Laplacien à valeurs vectorielles

Définition - Le Laplacien du champ " β " est l'adjoint de la Divergence du champ à valeurs d'endomorphismes de E donné par $\text{Grad } \beta$ au point " m ". Cette définition fournit le champ dérivé: $\Delta(\beta)(m)$.

$$\overline{\text{Div}((\text{Grad})(\beta)(m))(1)} = \overline{\text{Div}_m(\frac{\partial y}{\partial m})(1)} = \Delta(\beta)(m) = \Delta_m y \in E \quad (\text{II-17})$$

C'est une extension de la définition du champ Laplacien à valeurs scalaires, à ceci près que le gradient de l'application de β est représenté par l'adjoint de l'opérateur : $\beta'(m)$. La définition du Gradient du champ β est conforme à la définition du gradient du champ scalaire α vu dans la relation (II-15).

VECTEUR ASSOCIÉ À LA DIVERGENCE D'UN OPÉRATEUR "DÉRIVÉ"

Nous venons de voir la définition des laplaciens, il reste cependant un autre champ dérivé. En effet, il nous paraît intéressant d'utiliser l'opération différentielle agissant sur le champ déjà dérivé: $\beta'(m) = \frac{\partial y}{\partial m}$ et d'en chercher l'adjoint qui fournira un champ à valeurs vectorielles

Définition - Le **gradient** de la **divergence** du champ β au point " m " est représenté par l'adjoint de la Divergence du champ dérivé: $\beta'(m)$, d'où la relation suivante

$$\overline{\text{Div}(\beta'(m))(1)} = \overline{\text{Div}_m(\frac{\partial y}{\partial m})(1)} = [\text{grad.div}](\beta)(m) = \text{grad.div}_m y \in E \quad (\text{II-18})$$

VECTEUR ASSOCIÉ À LA DIVERGENCE D'UN OPÉRATEUR "DÉRIVÉ" ANTI-AUTO - ADJOINT

En fait, il nous reste une dernière opération à effectuer qui consiste à utiliser l'opérateur anti-auto-adjoint construit à partir du champ dérivé de β en " m " déjà écrit dans la relation (II-15) et d'en déduire la divergence du champ, puis d'extraire son vecteur associé.

Cet opérateur "dérivé" est donné par la différence de l'opérateur: $\beta'(m)$ et de son adjoint:

$$\overline{\beta'(m)}. \text{ En définitive nous obtenons l'opérateur: } \mathbf{A} \text{ tel que } \mathbf{A} = \beta'(m) - \overline{\beta'(m)} = \frac{\partial y}{\partial m} - \overline{\frac{\partial y}{\partial m}}$$

Il suffit pour obtenir le vecteur associé à la divergence de cet opérateur \mathbf{A} , de rassembler en une seule formule les relations (II-17) et (II-18). En effet, le résultat est simplement donné par la relation suivante:

$$\overline{\text{Div}_m(\mathbf{A})(1)} = \overline{\text{Div}_m((\beta'(m)) - \overline{\beta'(m)})(1)} = [\text{grad.div}](\beta)(m) - \Delta(\beta)(m) \in E$$

(II-19)

$$\overline{\text{Div}_m((\frac{\partial y}{\partial m}) - \overline{\frac{\partial y}{\partial m}})(1)} = \text{grad.div}_m y - \Delta_m y \in E$$

Remarques - Nous venons de montrer que tous ces opérateurs différentiels ont été obtenus, sans parler de repères et de composantes, ceci nous permet de parler d'opérations intrinsèques. En effet, si les repères et les composantes dépendent localement du point "m", il faut tenir compte des symboles de connexion. Tout cela est compris dans nos opérateurs.

Notons aussi que le vecteur associé à la différentiation de l'opérateur "dérivé" vu dans la relation (II-19) est très général, il ne dépend pas de la dimension de l'espace vectoriel considéré et de la façon dont on effectue le produit scalaire (signature elliptique ou hyperbolique), bien que la notion d'adjoint en dépende. Enfin, nous retrouverons ce type d'opérateurs différentiels dans les espaces quadridimensionnels qui seront construits ultérieurement.

Cas particulier - Si nous restreignons la dimension de E à trois, nous retrouvons la relation classique bien connue du double rotationnel. En effet, nous obtenons le résultat en utilisant la relation (II-14) [**Dah-74**]

$$\overline{\text{Div}_m((\frac{\partial y}{\partial m}) - \overline{\frac{\partial y}{\partial m}})(1)} = \overline{\text{Div}_m(J_E(\text{rot}_m y))(1)} \\ = \text{rot}_m \text{rot}_m y = \text{grad.div}_m y - \Delta_m y \in E$$

(II-20)

Ce dernier résultat ne peut être généralisé tel quel, nous l'utiliserons ultérieurement en redéfinissant ce type de relation pour les opérations quadri-dimensionnelles, en particulier pour les relations maxwelliennes.

- III - CONSTRUCTION D'ESPACES QUADRI-DIMENSIONNELS

Introduction

Dans ce paragraphe, nous allons traiter de façon simultanée plusieurs types d'espace quadri-dimensionnel. D'une part les espaces-temps liés aux observateurs et d'autre part l'espace Univers dont les éléments sont des Événements, ces derniers représentent les phénomènes physiques de l'évolution de notre environnement. Nous accédons aux événements de ce dernier espace par le biais des mesures analysées dans les espaces-temps des observateurs. Il est clair que ces deux types d'espace n'ont pas nécessairement la même signature [**Sou-64a**], [**CdG-72**]. Pour éclairer notre lanterne nous pouvons signaler que les quadri-espaces des observateurs sont ceux dans lesquels les théoriciens - expérimentateurs effectuent les mesures sur des phénomènes physiques observés [**Sou-70**], [**Gin-78**], [**Hen-2000**]. Par contre l'Univers est le lieu où les événements se produisent. Ce qui signifie pour nous, que les phénomènes "physiques" sont vus par chaque observateur dans un espace qui lui est associé grâce à ses moyens de mesures et d'identifications.

Il est évident que, si un ensemble d'observateurs "voient" le même phénomène "physique" alors, la forme de la loi physique doit être la même pour tous (c'est ce que l'on appelle "la

covariance" des écritures). Cette dernière remarque entraîne alors, que le phénomène est décrit d'une seule façon dans l'espace Univers. C'est dans cet état d'esprit que nous poursuivons notre étude. Nous représentons la classe des espaces des observateurs par un espace: $(\dot{F}, F, \mathbf{K}, g_F)$, en sachant qu'il sera toujours possible de distinguer les espaces des observateurs.

Il est clair, qu'à partir de l'espace affine \dot{E} de la géométrie classique tridimensionnelle et du corps \mathbf{K} , que nous connaissons bien, nous construisons un nouvel espace affine: \dot{F} de dimension 4, en effectuant un produit cartésien: $\dot{F} = \dot{E} \times \mathbf{K}$. Dans les applications qui suivront le corps \mathbf{K} représentera le corps des réels.

Définition des propriétés de l'espace affine: \dot{F}

- La définition d'un espace affine: \dot{F} de dimension 4 correspond à un espace de points, auquel est associé un espace vectoriel associé: F sur un corps: \mathbf{K} . C'est-à-dire le triplet (\dot{F}, F, \mathbf{K}) . S'il n'y a aucune ambiguïté possible, nous remplaçons ce triplet par \dot{F} . Nous souhaitons en plus que F soit muni d'un produit scalaire: g_F . Nous définissons le nouvel espace vectoriel F , comme étant le produit cartésien de l'espace E et du corps \mathbf{K} représenté par : $F = E \times \mathbf{K}$. Ce nouvel espace est muni du couplage interne g_F , régulier, permettant ainsi d'effectuer le produit scalaire. Tout cela est résumé dans la relation suivante (III-1) qui suit.

<p><i>Soit $\rightarrow F = E \times \mathbf{K} \rightarrow$ avec E de dimension 3 et le corps \mathbf{K}</i></p> <p><i>Alors $\forall \mathbf{m} = (\mathbf{x}, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \in F \rightarrow \mathbf{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$</i></p> <p><i>Alors $\forall \mathbf{n} = (\mathbf{y}, \mu) = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mu \end{pmatrix} \in F \rightarrow \mathbf{y} \in E$ et $\mu \in \mathbf{K}$</i></p> <p><i>le produit scalaire ou couplage interne régulier : $g_F \in \mathcal{L}(F; F^*)$</i></p> <p><i>$\forall \mathbf{m}$ et $\forall \mathbf{n} \left\{ \begin{array}{l} g_F(\mathbf{m})(\mathbf{n}) = g_F(\mathbf{n})(\mathbf{m}) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}} \\ = \overline{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}} = \overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} + \lambda \mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{signature elliptique de } F \\ \text{est : } (+, +, +, +) \end{array} \right\}$</i></p>	(III-1)
--	---------

- Nous définissons les endomorphismes: "a" de F et donnons un exemple abstrait qui permet de voir, comment est composée l'application sous forme matricielle:

<p><i>Tout Endomorphisme "a" de F sera noté sous forme matricielle</i></p> <p><i>$\mathcal{L}(F; F) \stackrel{\text{def}}{=} \text{End}(F) = \text{End}(E \times \mathbf{K}) \ni \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$</i></p> <p><i>$a_1 \in \text{End}(E)$; $a_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{K}, E)$; $a_3 \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$; $a_4 \in \mathcal{L}(\mathbf{K}, \mathbf{K})$</i></p> <p><i>Ceci entraîne $\text{End}(F) = \mathcal{L}(F, F) = \begin{bmatrix} \text{End}(E) & \mathcal{L}(\mathbf{K}, E) \\ \mathcal{L}(E, \mathbf{K}) & \mathcal{L}(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \end{bmatrix}$</i></p> <p><i>Exemple : $\mathbf{a}(\mathbf{m}) = \mathbf{n} = (\mathbf{y}, \mu) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{x}) + a_2(\lambda) \\ a_3(\mathbf{x}) + a_4(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mu \end{pmatrix}$</i></p>	(III-2)
--	---------

Définition des propriétés de l'espace affine: Univers: \dot{U}

La définition de cet espace ressemble au précédent avec quelques différences que nous présentons maintenant le triplet (\dot{U}, U, \mathbf{K}) . S'il n'y a aucune ambiguïté possible, nous

remplaçons ce triplet par $\dot{\mathcal{U}}$. Les éléments de $\dot{\mathcal{U}}$ sont appelés les événements. Nous imposons à \mathcal{U} d'être muni d'un produit scalaire: $g_{\mathcal{U}}$. Cet espace affine: $\dot{\mathcal{U}}$ est lié à \dot{F} par une application affine: \mathfrak{R} dont les qualités sont connues [CdG-72]. En effet, nous pouvons résumer cela par

$$\begin{aligned}
 & \forall m \in \dot{F} \exists \pi \in \dot{\mathcal{U}} \text{ tel que } \pi = \mathfrak{R}(m) \quad \forall m \in F \\
 & n = m + \mathbf{m} \in \dot{F} \Rightarrow \varpi = \mathfrak{R}(m + \mathbf{m}) = \mathfrak{R}(m) + \tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{m}) = \pi + \mathbf{v} \in \dot{\mathcal{U}} \\
 & \tilde{\mathfrak{R}} \in \mathcal{L}(F, \mathcal{U}) \Rightarrow \tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{m}) = \mathbf{v} \in \mathcal{U}
 \end{aligned} \tag{III-3}$$

*Les lettres en **maigre** représentent les points ou des scalaires,
tandis que les lettres en **gras** représentent des vecteurs*

Nous venons d'expliciter la relation affine entre $\dot{\mathcal{U}}$ et \dot{F} , il reste à définir le produit scalaire dans l'Univers suivant $g_{\mathcal{U}}$, et faire la liaison avec le produit scalaire: g_F dans F . Cela permet aux observateurs de mesurer dans leur propre espace, des quantités "physiques" de l'Univers. En effet, nous avons une relation "toute naturelle" entre ces types d'espace à l'exception de la signature de l'espace: \mathcal{U} . Cette dernière remarque a un effet important sur une classe primordiale de vecteurs de \mathcal{U} (qui n'est pas toujours abordée dans d'autres disciplines), que sont les "vecteurs isotropes". C'est-à-dire un ensemble de vecteurs non nuls dont le produit scalaire est nul, on dit que ces vecteurs forment des cônes de lumière [Sou-65], [CdG-72], [Sou-70], [Vall-87].

Le produit scalaire ou couplage interne régulier : $g_{\mathcal{U}} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{U}^)$*

$$\left[\begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U} \\ \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{U} \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})(\boldsymbol{\omega}) = g_{\mathcal{U}}(\tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{m}))(\tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{n})) \\ \text{Posons } \overline{\tilde{\mathfrak{R}}}\tilde{\mathfrak{R}} = \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -I_E & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ g_{\mathcal{U}}(\mathbf{v})(\boldsymbol{\omega}) = g_F(\overline{\tilde{\mathfrak{R}}}\tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{m}))(\mathbf{n}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{m} \end{array} \right\} \tag{III-4}$$

\mathbf{U} est une involution $\Rightarrow \mathbf{U}^2 = I_F \Rightarrow \overline{\tilde{\mathfrak{R}}} = \mathbf{U}\tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \Rightarrow \overline{\tilde{\mathfrak{R}}}^{-1} = \tilde{\mathfrak{R}} \cdot \mathbf{U}$

Tout $\mathbf{A} \in \text{End}(\mathcal{U})$ est lié à $\mathbf{a} \in \text{End}(F)$: $\mathbf{A} = \overline{\tilde{\mathfrak{R}}} \cdot \mathbf{a} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}$

La signature de \mathcal{U} est hyperbolique : $(-, -, -, +)$

Nous avons fait apparaître toutes les caractéristiques de \dot{F} et de $\dot{\mathcal{U}}$, ainsi que leurs liaisons. Il est possible maintenant de définir sur chacun d'eux, de façon simultanée, les opérateurs différentiels. Nous porterons un regard particulier sur les opérateurs définis sur \mathcal{U} , car ils représenteront la formulation intrinsèque des modèles de lois différentielles. Nous conviendrons de nommer ces opérations: "opérateurs différentiels d'Univers". Remarquons que nous accédons à ces opérations par ses composantes dans F (ou dans l'espace de mesure de l'un des observateurs). Il ne reste plus qu'à les définir, c'est ce qui est entrepris maintenant.

- IV - OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUADRI-DIMENSIONNELS

Dès maintenant nous utilisons, des champs différentiables dans \dot{F} et dans $\dot{\mathcal{U}}$ au moins de classe C^2 . Nous donnons ces opérateurs différentiels sous leur forme finale, mais un petit effort est nécessaire pour les démonstrations.

IV-1 Différentiation du premier ordre

LE GRADIENT

Soient les applications différentiables: Ψ et Φ définies respectivement dans \dot{F} et $\dot{\mathcal{U}}$, à valeurs dans \mathbf{K} (voir diagramme figure IV-1). Puisque \mathfrak{R} est affine et de classe C^1 , il joue un rôle équivalent aux repères classiques. Cette remarque servira tout au long de notre étude. Les résultats des formules II-6 et II-7 sont applicables pour les deux applications : Ψ et ϕ . Il est facile de les différentier et obtenir les vecteurs gradients de Ψ et de ϕ .

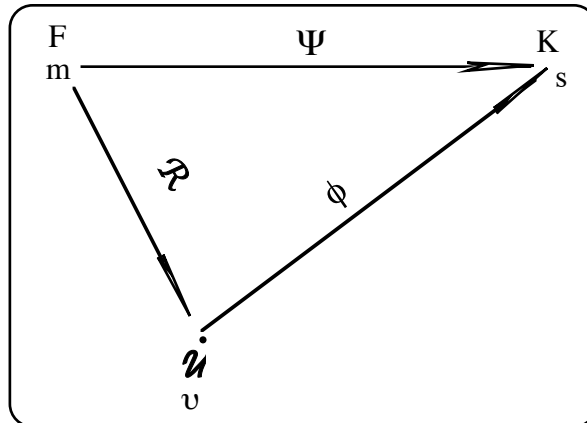


Figure IV-1 - Diagramme d'une application au moins C^2 à valeurs scalaires

<p>Dans F $\text{grad}(\Psi)(m) = \text{grad}_m s = \frac{\partial s}{\partial m}(1) = \begin{pmatrix} \text{grad}_x s \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$</p>	(IV-2)
<p>Dans \mathcal{U} $\text{grad}(\phi)(u) = \text{grad}_u s = \frac{\partial s}{\partial u}(1) = \tilde{\mathfrak{R}} \cdot \begin{pmatrix} -\text{grad}_x s \\ \frac{\partial s}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$</p>	

Le champ du gradient de ϕ dans \mathcal{U} est simple. En effet, $\tilde{\mathfrak{R}}$ s'applique à un vecteur de F (proche du gradient: $\text{grad}(\Psi)(m)$ au signe près) pour fournir un vecteur de \mathcal{U} .

LA DIVERGENCE

Utilisons la définition de la divergence donnée dans (II-7) avec un plus. En effet, il faut deux champs à valeurs vectorielles, l'un dans F et l'autre dans \mathcal{U} . Le diagramme qui suit permet de mieux interpréter notre point de vue.

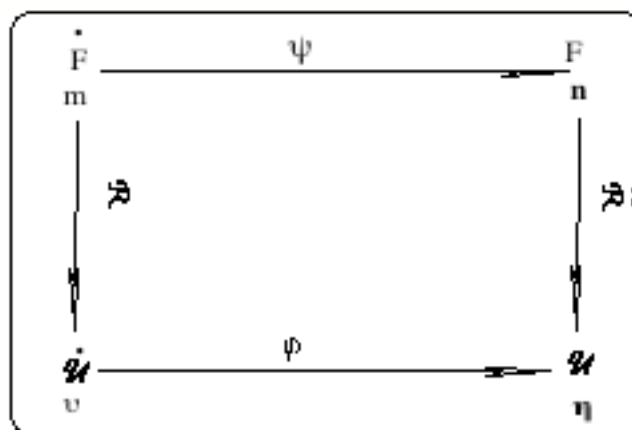


Figure IV-3 - Diagramme d'applications au moins C^2 dans F et \mathcal{U} .

Là encore, nous donnons simplement le résultat, les démonstrations servent d'exercices

<p><i>Nous avons une relation entre $\mathbf{n} = (\mathbf{y}, \mu)$ et $\boldsymbol{\eta}$ telle que : $\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{n})$</i></p> <p><i>Dans $F \Rightarrow \operatorname{div}(\psi)(m) = \operatorname{div}_m \mathbf{n} = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right) + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = \operatorname{div}_x \mathbf{y} + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}$</i></p> <p><i>Dans $\mathcal{U} \Rightarrow \operatorname{div}(\varphi)(v) = \operatorname{div}_v \boldsymbol{\eta} = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}\right) = \operatorname{tr}\left(\tilde{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}\right) = \operatorname{div}(\psi)(m)$</i></p>	(IV-4)
--	--------

Nous avons ici un résultat très important pour la suite. Nous trouvons le même résultat scalaire pour les champs quelconques ψ et φ reliés par les applications \mathfrak{R} et $\tilde{\mathfrak{R}}$. En fait, ici, l'application linéaire $\tilde{\mathfrak{R}}$ joue de nouveau le rôle d'un repère d'espace. Cette remarque va servir, en particulier pour définir la divergence d'un endomorphisme de F et son endomorphisme associé dans \mathcal{U} .

VECTEUR ASSOCIÉ À LA DIVERGENCE D'UN ENDOMORPHISME

Nous allons utiliser les précédentes remarques sur la divergence d'un champ de vecteurs, à condition de définir les nouveaux champs de vecteurs un peu plus complexes. En effet, nous utilisons des champs de vecteurs définis à partir de deux types d'objets que sont les endomorphismes et les vecteurs. Ce qui signifie qu'un champ de vecteur peut être obtenu par un champ d'endomorphisme appliqué à un champ de vecteur.

<p><i>Nous avons une relation de type linéaire telle : $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{n})$</i></p> <p><i>avec $\mathbf{q} = (\mathbf{z}, \kappa) \in F$; $\mathbf{f} \in \operatorname{End}(F)$; $\mathbf{n} = (\mathbf{y}, \mu) \in F$</i></p> <p><i>Ces trois champs définis dans \dot{F} dépendent du point courant "m". A ces trois champs correspondent trois autres champs dans $\dot{\mathcal{U}}$ à valeurs dans \mathcal{U} tels que : $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$</i></p> <p><i>avec $\boldsymbol{\eta} = \tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{n}) \in \mathcal{U}$; $\boldsymbol{\varphi} = \tilde{\mathfrak{R}} \cdot \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \in \operatorname{End}(\mathcal{U})$; $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{q}) \in \mathcal{U}$</i></p>	(IV-5)
--	--------

Or nous avons vu précédemment dans la relation (IV-4) que la valeur scalaire de la divergence de \mathbf{q} suivant m est identique à la divergence de $\boldsymbol{\omega}$ suivant v , d'où la relation:

$$\operatorname{div}_m \mathbf{q} = \operatorname{div}_v \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial m}\right) = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial v}\right)$$

Puisque nous avons affaire pour ces deux champs à des applications composées, il est assez facile de traduire les précédentes relations afin d'identifier les divergences des endomorphismes: ($\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}$) respectivement dans F^* et \mathcal{U}^* . Nous avons comme dans la relation (II-10).

<p><i>Dans $F \Rightarrow \operatorname{div}_m \mathbf{q} = \operatorname{tr}\left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial m}\right) = \operatorname{Div}_m \mathbf{f}(\mathbf{n}) + \operatorname{tr}\left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}\right) \in \mathbf{K}$</i></p> <p><i>Dans $\mathcal{U} \Rightarrow \operatorname{div}_v \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div}_m \mathbf{q} = \operatorname{Div}_m \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) + \operatorname{tr}\left(\mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}\right) \in \mathbf{K}$</i></p> <p><i>où $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}$ Alors la divergence de $\boldsymbol{\varphi}$ est: $\operatorname{Div}_v \boldsymbol{\varphi} = \operatorname{Div}_m \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \in \mathcal{U}^*$</i></p>	(IV-6)
---	--------

En définitive, nous venons de voir que la divergence de l'opérateur: $\boldsymbol{\varphi}$ est reliée à la divergence de l'opérateur: \mathbf{f} , mais cette opération de différentiation fournit des covecteurs pour ces champs.

Il est possible alors, d'accéder à des vecteurs associés par le biais des couplages définis dans les relations (III-1) et (III-4) respectivement dans F et dans \mathcal{U} . Écrivons ces champs de divergence à partir de la définition de l'opérateur \mathbf{f} .

$$\begin{aligned} \text{Dans } F^* &\Rightarrow \text{Div}_m \mathbf{f} = \left[\text{Div}_x f_1 + \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \quad \text{div}_x f_2 + \frac{\partial f_4}{\partial \lambda} \right] \in F^* \\ \text{Dans } \mathcal{U}^* &\Rightarrow \text{Div}_v \boldsymbol{\varphi} = \left[\text{Div}_x f_1 + \frac{\partial f_3}{\partial \lambda} \quad \text{div}_x f_2 + \frac{\partial f_4}{\partial \lambda} \right] \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \in \mathcal{U}^* \end{aligned} \quad (\text{IV-7})$$

Nous en déduisons par la notion d'adjoint dû aux couplages les contravecteurs associés, par suite, nous obtenons les champs à valeurs vectorielles.

$$\begin{aligned} \text{Dans } F &\Rightarrow \overline{\text{Div}_m \mathbf{f}}(1) = \left(\begin{array}{c} \left(\overline{\text{Div}_x f_1 + \frac{\partial f_3}{\partial \lambda}} \right) \\ \text{div}_x f_2 + \frac{\partial f_4}{\partial \lambda} \end{array} \right) (1) \in F \\ \text{Dans } \mathcal{U} &\Rightarrow \overline{\text{Div}_v \boldsymbol{\varphi}}(1) = \tilde{\mathfrak{R}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overline{\text{Div}_m \mathbf{f}}(1) = \tilde{\mathfrak{R}} \left(- \left(\begin{array}{c} \left(\overline{\text{Div}_x f_1 + \frac{\partial f_3}{\partial \lambda}} \right) \\ \text{div}_x f_2 + \frac{\partial f_4}{\partial \lambda} \end{array} \right) (1) \right) \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (\text{IV-8})$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous pouvons considérer les contravecteurs comme des vecteurs (rappel ; les contravecteurs sont des applications linéaires définies dans \mathbf{K} à valeurs vectorielles). Il suffit pour simplifier les écritures d'enlever "appliquer à 1" dans la relation (IV-8). Dans la suite de l'analyse, le corps \mathbf{K} sera tout simplement le corps des réels: \mathbf{R} pour les applications ultérieures liées aux expériences de la Physique.

IV-2 Différentiation du second ordre

Nous reprenons l'étude présentée au paragraphe II, pour traiter les opérateurs du second ordre dans F et \mathcal{U} . Ils sont nécessaires pour résoudre les problèmes de la "Physique".

LES LAPLACIENS

Le Laplacien à valeurs scalaires

Nous utilisons les relations (II-16) et (IV-2) pour traiter le Laplacien à valeurs scalaires aussi bien pour l'application définie dans F que celle définie dans \mathcal{U} . Les résultats sont évidents.

$$\begin{aligned} \text{Dans } F &\Delta(\Psi)(m) = \text{div} \cdot \text{grad}(\Psi)(m) = \text{div}_m \text{grad}_m s \\ &= \Delta_m s = \Delta_x s + \frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} = \left[\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] (s) \\ \text{Dans } \mathcal{U} &\Delta(\phi)(v) = \text{div} \cdot \text{grad}(\phi)(v) = \\ &= \Delta_v s = -\Delta_x s + \frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} = - \left[\Delta_x s - \frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} \right] = - \boxtimes_m (s) \end{aligned} \quad (\text{IV-9})$$

Ici \boxtimes représente l'opérateur D'Alembertien au sens large

Le Laplacien à valeurs vectorielles

Nous agissons comme dans le paragraphe II, en utilisant la relation (II-17), tout en nous servant du résultat des relations (IV-2) et (IV-8). En fait, il nous faut un endomorphisme adjoint de F

et son "équivalent" dans \mathcal{U} , puis effectuer la divergence de chacun et d'en faire apparaître les vecteurs associés par la notion d'adjoint dans chacun des espaces. Pour cela reprenons les résultats de la première dérivation des champs de la relation (IV-2):

$$\begin{aligned} (\psi)'(m) &= \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m} \in \mathcal{L}(F) \Rightarrow \overline{(\psi)'(m)} = \overline{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}} \in \mathcal{L}(F) \\ (\varphi)'(v) &= \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} = \tilde{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \text{ et } \overline{(\varphi)'(v)} = \overline{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}} = \tilde{\mathfrak{R}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overline{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}} \cdot \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) \end{aligned} \quad (\text{IV-10})$$

Les relations précédentes (IV-4), (IV-5) et (IV-6) nous servent pour traiter d'une part, la forme

matricielle des endomorphismes: $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}$, $\overline{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}}$ pour identifier les endomorphismes de \mathcal{U} : $\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}$,

$\overline{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}}$ et d'autre part, pour calculer les opérateurs différentiels de divergence "ad hoc" et identifier les vecteurs associés, suivant la relation (IV-8). Nous écrivons les formes matricielles des six endomorphismes "dérivés", dont trois pour F et le reste pour l'espace vectoriel "univers": \mathcal{U} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}} = \begin{bmatrix} \overline{\frac{\partial y}{\partial x}} & \overline{\frac{\partial \mu}{\partial x}} \\ \overline{\frac{\partial y}{\partial \lambda}} & \overline{\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} &= \tilde{\mathfrak{R}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} & \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \quad \text{et} \quad \overline{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}} = \tilde{\mathfrak{R}} \begin{bmatrix} \overline{\frac{\partial y}{\partial x}} & \overline{\frac{\partial \mu}{\partial x}} \\ \overline{\frac{\partial y}{\partial \lambda}} & \overline{\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}} \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{IV-11})$$

Nous écrivons les endomorphismes anti-auto-adjoints dans F et dans \mathcal{U}

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m} - \overline{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} - \overline{\frac{\partial y}{\partial x}} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \overline{\frac{\partial y}{\partial \lambda}} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} - \overline{\frac{\partial \mu}{\partial x}} & \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} - \overline{\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} - \overline{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}} = \tilde{\mathfrak{R}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} - \overline{\frac{\partial y}{\partial x}} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \overline{\frac{\partial \mu}{\partial x}} \\ \frac{\partial \mu}{\partial x} + \overline{\frac{\partial y}{\partial \lambda}} & \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} - \overline{\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}} \end{bmatrix} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1}$$

Nous venons de voir que le représentant dans F de l'endomorphisme: $\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} - \overline{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}}$ est un opérateur dont les composantes anti-diagonales sont "symétriques" au sens de l'adjoint, cela est dû au fait que l'adjoint de $\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v}$ fait intervenir l'opérateur \mathbf{U} deux fois (une fois à gauche et une fois à droite de l'adjoint de $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}$). En ce qui concerne les Laplaciens vectoriels dans F et dans \mathcal{U} , les calculs sont simples en utilisant les résultats vus dans les relations: (IV-8) et (IV-11). En clair, nous avons:

$$\begin{aligned}
\overline{\text{Div}_m \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{m}}}(1) &= \left(\left(\overline{\text{Div}_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}}(1) + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \lambda^2} \right) \right) = \left(\left(\Delta_x \mathbf{y} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \lambda^2} \right) \right) = \Delta_m \mathbf{n} \in \mathbf{F} \\
\overline{\text{Div}_v \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{v}}}(1) &= - \tilde{\mathfrak{H}} \left(\left(\Delta_x \mathbf{y} - \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \lambda^2} \right) \right) = - \tilde{\mathfrak{H}}(\boxtimes_m \mathbf{n}) = \Delta_v \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}
\end{aligned}
\tag{IV-12}$$

Ici \boxtimes représente l'opérateur Dalemberdien vectoriel au sens large

Une remarque s'impose quant au laplacien du champ $\boldsymbol{\eta}$ dans \mathcal{U} . Il représente au signe près le Dalemberdienne associé à un champ d'ondes et sera utile pour traiter les équations de Maxwell.

VECTEUR ASSOCIÉ À LA DIVERGENCE D'UN OPÉRATEUR "DÉRIVÉ"

Intéressons nous aux endomorphismes "dérivés" exprimés dans la relation (IV-11) respectivement $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{m}}$ et $\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{v}}$. dans les espaces \mathbf{F} et \mathcal{U} . Nous retrouvons les vecteurs correspondants associés à la divergence de ces opérateurs. Il suffit d'utiliser la relation de base (IV-8) et les résultats développés de la relation (IV-11). Nous obtenons les résultats suivants.

$$\begin{aligned}
\text{En posant le scalaire } p &= \text{div}_x \mathbf{y} + \frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \\
\overline{\text{Div}_m \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{m}} \right)}(1) &= \left(\left(\overline{\text{Div}_x \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}}(1) + \frac{\partial \text{grad}_x \mu}{\partial \lambda} \right) \right) = \left(\text{grad}_x p \right) = \text{grad}_m \text{div}_m \mathbf{n} \in \mathbf{F} \\
\overline{\text{Div}_v \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{v}} \right)}(1) &= \tilde{\mathfrak{H}} \cdot \left(\begin{array}{c} (-\text{grad}_x p) \\ \frac{\partial p}{\partial \lambda} \end{array} \right) = \text{grad}_v \text{div}_v \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}
\end{aligned}
\tag{IV-13}$$

VECTEUR ASSOCIÉ À LA DIVERGENCE D'UN OPÉRATEUR "DÉRIVÉ" ANTI-AUTO-ADJOINT

Enfin, nous arrivons à l'une des dernières opérations à effectuer qui représente la construction aussi bien dans \mathbf{F} que dans \mathcal{U} d'un opérateur anti-auto-adjoint, à partir d'un opérateur "dérivé". C'est possible, car il suffit pour cela de faire la différence de l'opérateur "dérivé" et de son adjoint, comme nous l'avons fait dans la relation (II-19).

$$\begin{aligned}
\text{En posant les vecteurs: } \mathbf{h}_1 &= \text{grad}_x \mu - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} \text{ et } \mathbf{h}_2 = \text{grad}_x \mu + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda} \\
\overline{\text{Div}_m \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{m}} - \overline{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{m}}} \right)}(1) &= \left(\left(\text{rot}_x \text{rot}_x \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \lambda} \right) \right) = \text{grad}_m \text{div}_m \mathbf{n} - \Delta_m \mathbf{n} \in \mathbf{F} \\
\overline{\text{Div}_v \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{v}} - \overline{\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{v}}} \right)}(1) &= \tilde{\mathfrak{H}} \left(\begin{array}{c} - \left(\text{rot}_x \text{rot}_x \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \lambda} \right) \\ \text{div}_x \mathbf{h}_2 \end{array} \right) = \text{grad}_v \text{div}_v \boldsymbol{\eta} - \Delta_v \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}
\end{aligned}
\tag{IV-14}$$

Ces derniers résultats montrent l'existence de deux vecteurs vecteur \mathbf{h}_1 et \mathbf{h}_2 différents, cela est dû aux Laplaciens vectoriels grâce à l'intervention de \mathbf{U} . En effet, nous avons vu dans la relation (IV-12) que le Laplacien dans \mathcal{U} est un Dalambertien au signe près, ceci est dû à la signature hyperbolique de l'espace, alors que la signature initiale de F est elliptique.

Si nous utilisons le résultat de la relation (IV-12) pour ce qui est du Laplacien vectoriel puis, portons sa valeur dans la dernière ligne de la relation (IV-14), nous obtenons

$$\text{Dans } \mathcal{U} \quad \overline{\text{Div}_v(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\eta}}}{\partial v})(1)} = \tilde{\mathfrak{R}} \left(- \left(\begin{array}{c} \text{rot}_x \text{rot}_x \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \lambda} \\ \text{div}_x \mathbf{h}_2 \end{array} \right) \right) = \text{grad}_v \text{div}_v \boldsymbol{\eta} + \tilde{\mathfrak{R}}(\boxtimes_m \mathbf{n}) \quad (\text{IV-14 bis})$$

Le résultat devient intéressant, car la divergence de cet endomorphisme anti-auto-adjoint dans \mathcal{U} fait apparaître deux termes, le premier est assez conventionnel, tandis que le second est un dalambertien du quadri-vecteur dans F. Cette remarque importante pour traiter les équations de Maxwell que nous verrons (dans le cadre des applications) au paragraphe V-II. Si l'on impose en plus $\text{div}_v \boldsymbol{\eta} = 0$ alors, le résultat (IV-14 bis) s'écrit simplement

$$\overline{\text{Div}_v(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\eta}}}{\partial v})(1)} = \tilde{\mathfrak{R}}(\boxtimes_m \mathbf{n}) \quad (\text{IV-15})$$

Ce résultat met en évidence les problèmes de propagation d'ondes dans le vide [**Gin-78**].

Commentaires

-Tous les opérateurs différentiels de l'espace \mathcal{U} sont visualisés à partir des champs différentiables dans F. En d'autres termes, il est possible de traiter les phénomènes "physiques" ayant lieu dans l'univers \mathcal{U} , bien que cet espace soit difficile d'accès, autrement que par le biais de l'espace de l'observateur: F. C'est le transfert par hérédité dans F de la signature de \mathcal{U} .

- Il est possible d'avoir plusieurs observateurs, chacun muni de son espace associé (par exemple G, G'..., que nous verrons dans le prochain paragraphe) pour traiter les mêmes phénomènes de l'univers.

-La question fort intéressante qui restera à traiter sera liée à la communication entre eux pour expliquer la même physique. Ceci est bien connu depuis l'avènement de la relativité restreinte (Lorentz, Poincaré, Einstein...), dès la fin du 19^e siècle et le début de 20^e siècle.

- Il est facile de voir dans la relation (IV-14) que les deux champs de vecteurs résultant de la divergence d'un opérateur "dérivé" sont à divergence nulle.

$$\begin{array}{l} \text{Quel que soit l'endomorphisme : } \mathbf{f} \text{ de F et son équivalent dans } \mathcal{U} : \boldsymbol{\varphi} = \tilde{\mathfrak{R}} \cdot \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \text{ puis} \\ \text{dans les relations (IV-3) et (IV-4) donnent, alors} \\ \text{Dans F} \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{div}_m(\text{Div}_m(\mathbf{f} - \overline{\mathbf{f}}))} = 0 \\ \text{Dans } \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{div}_v(\text{Div}_v(\boldsymbol{\varphi} - \overline{\boldsymbol{\varphi}}))} = 0 \end{array} \quad (\text{IV-16})$$

Est-ce que ce phénomène est seulement dû au fait que l'opérateur anti-auto-adjoint est déjà un opérateur "dérivé, ou bien est-ce plus général? La réponse est affirmative dans le cadre des espaces quadri-dimensionnels que nous avons construits.

- Ces derniers résultats sont généraux, pour s'en convaincre, il suffit de construire des espaces affines et vectoriels associés de dimension supérieure, par exemple cinq (Espace de Kaluza) [Sou-64b]. Pour cela, nous effectuons le produit cartésien de l'espace classique de dimension trois et de deux fois le corps des réels.

- Les résultats de la relation (IV-16) sont généraux et indépendants de la dimension de l'espace. Ici l'élégance est liée à des notions comprises de tous, comme espaces vectoriels, champs de vecteurs, et champs d'endomorphismes anti-auto-adjoints. Or, nous savons qu'il existe un autre moyen de retrouver ce type de résultats par le biais de l'algèbre extérieure [Car-45], [Sou-64b], [Abr-67], [Pha-68], [Sou-70]... La construction de cette algèbre due à Grassmann a permis à Henri Poincaré de mettre en évidence, les p-formes différentielles extérieures, la différentiation extérieure et enfin de proposer un théorème qui stipule qu'une double différentiation extérieure agissant sur une p-forme différentielle donne un résultat nul [Car-45], [Sou-64b], [Pha-68], [Sou-70], [Dou et al-79]. Nos précédents résultats valident ce théorème.

- Les opérations différentielles traitées dans ce paragraphe, vont mettre en lumière la covariance sur des applications physiques choisies bien connues.

- V - APPLICATIONS

Nous proposons un peu d'histoire avant de présenter les applications pour lesquelles nous avons proposé notre façon d'appréhender les opérateurs différentiels mis en valeur dans le paragraphe précédent.

Rappelons tout de même que la bibliographie que nous possédions à l'époque de nos travaux était limitée aux publications de l'année soixante-douze. Les publications au-delà de l'année soixante-douze permettent de confirmer nos efforts de l'époque et de bien situer nos applications dans le domaine de la physique mathématique.

Un excellent travail d'historien et de philosophe existe sur l'aventure humaine et intellectuelle de la découverte de la relativité [Auf-99]. Nous donnerons seulement le fil conducteur qui montrera l'intérêt de la grande entreprise d'unification pour mieux comprendre les phénomènes physiques.

Fil conducteur de la physique contemporaine

Les phénomènes d'aberrations astronomiques (dus à la vitesse de la lumière) ont conduit à la relativité. Bien que ceux-ci furent expliqués pour la première fois par James Bradley (1727), le précurseur fut Giovanni Pieroni (ami de Galilée) un siècle avant. Ce dernier en 1639 avait à plusieurs reprises observé que la position de certaines étoiles n'était pas la même d'une fois sur l'autre, il pensait à un phénomène de parallaxe stellaire, ce qui n'était pas le cas. À partir des travaux de Bradley, Leonhard Euler (1707-1783) proposa dès 1739 plusieurs modèles pour tenter d'expliquer ces phénomènes. Ces modèles étaient basés alternativement sur les deux conceptions de la lumière de l'époque - la première considère la lumière comme un mouvement

ondulatoire dans un milieu élastique qui remplit l'espace (éther) proposée par Christiaan Huygens (1629-1695) - La seconde de type "ballistique" d'Isaac Newton (1642-1727) qui considérait les rayons lumineux (rais) composés de corpuscules se propageant en ligne droite à grande vitesse.

En 1788 Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) publie son traité de "Mécanique analytique", il met en évidence l'équation d'onde qui permet de traiter la propagation dans tous les milieux. Dès lors la question se pose sur la propagation de la lumière, cette question mettra en évidence les travaux de François Dominique Arago (1786-1853) aidé de son ami Augustin Fresnel (1788-1827). Fresnel a proposé une formule, pour rendre compte du comportement de la lumière dans le phénomène d'aberration (entraînement partiel de l'éther par la Terre). Cette formule célèbre mettra plus d'un siècle avant d'être acceptée par les physiciens, elle est la première formule "relativiste" Elle sera confirmée en 1854 par l'expérience en laboratoire d'Armand Hippolyte Fizeau (1819-1896), et par celle de l'astronome George Bidell Airy (1801-1892) en observant une étoile avec sa lunette remplie d'eau, il donne même la valeur de l'entraînement partiel de l'ordre de 44% pour l'eau.

Parallèlement aux recherches sur l'aberration en astronomie, d'autres travaux étaient développés sur les phénomènes électriques. Citons les travaux sur la "machine électrique" de Christian August Hausen (1693-1743) repris par Georges Mathias Bose (1710-1761). Enfin en 1800 Alessandro comte Volta (1745-1827) crée la première pile électrique. C'est le début des réflexions de Hans Christian Oersted (1777-1851) sur la façon de relier l'électricité et le magnétisme dans une expérience à l'aide d'une pile voltaïque. Cette expérience intéresse Arago, et André Marie Ampère (1775-1836). Ce dernier généralise les travaux d'Oersted, il réunit l'électricité et le magnétisme en une seule science, et formule sa loi "d'action mutuelle" entre points. Cette loi de points, intéresse Carl Friederich Gauss (1777-1855), Wilhem Weber (1804-1891) et Bernhard Riemann (1826-1866) qui étaient des représentants de l'école de Göttingen. En 1833 Gauss et Weber cherchent à exprimer "la loi fondamentale" de la transmission de la force électrique entre corps en mouvement. Tandis que Riemann en 1850 propose une théorie qui stipule que toute particule électrisée produit un potentiel qui se propage dans l'espace à la vitesse de la lumière.

Dès lors tout est prêt pour une unification des phénomènes électromagnétiques, c'est le travail de James Clerk Mawell (1831-1879) qui publie un traité en deux volumes en 1873. Nous entrons dans l'ère de la théorie électromagnétique de la lumière toujours en vigueur de nos jours.

Le phénomène d'aberration astronomique et la théorie électromagnétique de la lumière seront les deux sources porteuses de recherche en Europe jusque dans les années 1925, où s'illustreront; Ernst Mach (1838-1916), Félix Klein (1849-1925), Woldemar Voigt (1850-1919), Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), Henri Poincaré (1854-1912), Adolph Hurwitz (1859-1919), David Hilbert (1862-1943), Hermann Minkoski (1864-1909), Albert Einstein

(1879-1954) et bien d'autres. Grâce à leurs efforts tout ces mathématiciens et physiciens mettront au point et de façon claire la physique contemporaine.

Il reste de nos jours des difficultés non réglées concernant la liaison entre la Relativité Générale et la Physique Quantique. C'est actuellement un domaine de recherche en effervescence où chaque chercheur tente d'apporter son concours [Not-2000]...

Choix d'applications

Nous proposons deux applications à la physique dans l'Univers \mathcal{U} . Nous présentons - une vision de la relativité restreinte - et une mise en valeur des équations de Maxwell-Lorentz.

- V-I Un aperçu de la relativité restreinte

Introduction

Tout d'abord, afin que l'on puisse traiter les études à venir, le corps K est le corps des réels R . Puis nous dessinons un diagramme des espaces ayant un rôle pour nous aider ultérieurement.

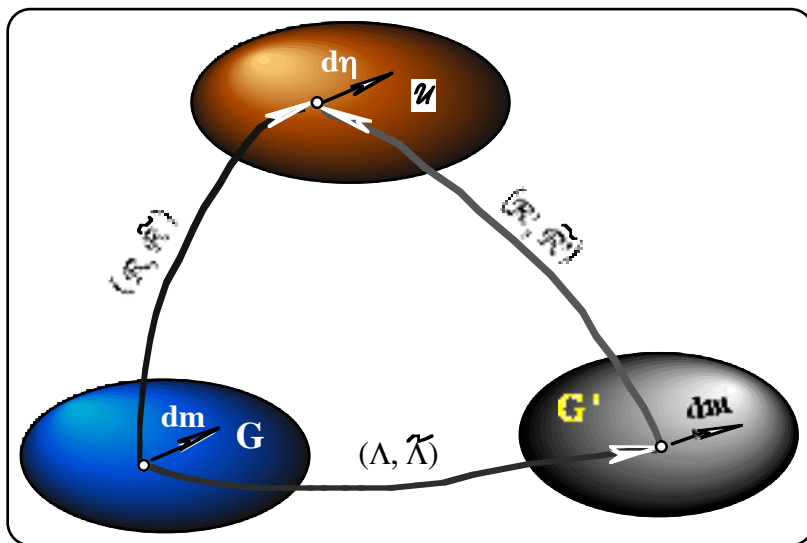


Figure V - 1 Diagramme des applications "Observateurs - Univers"

Nous utilisons pour notre étude les définitions précédentes (III-1 à III-4). En d'autres termes, nous avons besoin de l'univers/ $\mathcal{U} \approx (\dot{\mathcal{U}}, \mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$, de $F \approx (\dot{F}, F, g_F)$, auxquels nous ajoutons un nouvel espace $F' \approx (\dot{F}', F', g_{F'})$ isomorphe à F , de manière à disposer dans un premier temps de deux espaces F et F' chacun associé à un observateur capable de traiter des événements qui évoluent dans l'Univers.

Analyse algébrique de la relativité restreinte

Nous faisons en sorte que les propriétés de ces espaces F et F' soient semblables par rapport à l'Univers: \mathcal{U} . Cela se traduit de façon mathématique par la relation

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \eta \in \mathcal{U} \text{ il existe } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m} \in F \\ \mathbf{m}' \in F' \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = \tilde{\mathfrak{H}}(\mathbf{m}) = \tilde{\mathfrak{H}}'(\mathbf{m}') \\ \text{avec} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{m}' = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \lambda' \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad (V-2)$$

Lorentz: $G_{\mathcal{U}}$. Pour conclure sur cette précédente analyse, si $\tilde{\Lambda}$ peut s'écrire en fonction de $\tilde{\mathfrak{R}}$ et de $\tilde{\mathfrak{R}}'$ de la façon suivante: $\tilde{\Lambda} = \tilde{\mathfrak{R}}'^{-1} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}$ alors, $\mathbf{h} = \mathbf{I}_{\mathcal{U}}$, c'est l'élément neutre du groupe de Lorentz: $G_{\mathcal{U}}$.

Tout ce que nous venons de dire est précis, mais risque de ne pas être accessible à tous. Dès lors quelques simplifications sont nécessaires (sans nuire à la généralité) pour une meilleure compréhension et une nouvelle lecture par un plus grand nombre. Pour cela, nous identifions les deux espaces F et F' en un seul et même F, tandis que les deux observateurs seront identifiés aux galiléens G et G' à deux feuillets d'un même espace F ayant à l'instant initial un même point origine. Ces simplifications entraînent une facilité dans l'écriture de l'équation que doit vérifier l'opérateur $\tilde{\Lambda}$ représentatif de la transformation de Lorentz .

$$\boxed{\left\{ \tilde{\Lambda} \text{ est solution de } \Rightarrow \mathbf{U} = \bar{\tilde{\Lambda}} \cdot \mathbf{U} \cdot \tilde{\Lambda} \right\}} \quad (\text{V-7})$$

La digression que nous allons proposer maintenant peut être évitée en première lecture. Elle intéresse les lecteurs qui souhaitent en savoir plus sur les transformations de Lorentz, nous proposons la lecture de quelques références [Sou-64b],[Sou-65], [Sou-70],[Sed-75], [Dou et al-79], [Sou-82]. Faisons un petit pas sur le sujet pour les lecteurs n'ayant pas la possibilité d'avoir "sous la main" cette bibliographie. Nous voulons montrer comment construire les opérateurs: $\tilde{\Lambda}$ possibles entre deux galiléens.

Digression

Nous voyons apparaître dans la figure V-I, une application linéaire: $\tilde{\Lambda}$ qui permet de relier la feuille vectorielle de G à celle de G' de l'espace vectoriel F. Nous venons de voir que cette application: $\tilde{\Lambda}$ est une représentation de la **transformation de Lorentz**.

Ce type de transformation a été définitivement mis en valeur et démontré par H. Poincaré en 1905 d'après les travaux de H Lorentz de 1899. L'ensemble de ce type de transformation forme un Groupe: $G_{\mathcal{U}} \subset \text{End}(\mathcal{U})$ appelé **groupe de Lorentz** [Sou-64b],[Sou-65].

Ce groupe a été étendu à des dimensions supérieures ou égales à deux pour les espaces euclidiens hyperboliques normaux - c'est le groupe unitaire $U(\mathcal{U})$ [Sou-64b], [Sou-70], [Sed-75], [Dou et al-79]. Le groupe unitaire: $U(\mathcal{U})$ est l'ensemble des $\mathbf{h} \in \text{End}(\mathcal{U})$ du groupe linéaire de \mathcal{U} : $GL(\mathcal{U})$, tel que: $\bar{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{I}_{\mathcal{U}}$. Il existe un théorème qui permet de voir si un élément proposé appartient au groupe $G_{\mathcal{U}} = U(\mathcal{U})$, nous le rappelons ici,

Théorème [Sou-65] étendu à l'univers \mathcal{U}

Toute application de Lorentz \mathbf{h} d'ordre n, peut se mettre sous la forme:

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{h} = \tilde{\mathfrak{R}}' \cdot \tilde{\Lambda} \cdot \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} = \tilde{\mathfrak{R}}' \cdot \left\{ \exp(\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{x}} & 0 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} \bar{\Omega} & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \right\} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \\ \text{avec} \\ \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F_{n-1}) \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = 1, \varepsilon = \pm 1 \text{ et } \bar{\Omega} \cdot \Omega = \mathbf{I}_{F_{n-1}} \end{array} \right] \quad (\text{V-8})$$

Si nous voulons traiter le cas qui nous intéresse pour la suite de l'étude (en précisant que l'espace vectoriel F est de dimension quatre), il nous faut trouver (ou construire) parmi les éléments du groupe: \mathbf{G}_u , l'élément \mathbf{h} représenté par $\tilde{\Lambda}$ lié à la **translation** (par le vecteur unitaire: \mathbf{u} de E de dimension 3) entre les galiléens G et G'. Nous n'avons pas de rotation entre G et G', nous prenons Ω égal à l'identité dans E, ce qui donne la transformation: $\tilde{\Lambda}$.

$$\text{On pose } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \in E \quad \tanh(\alpha) = \frac{\|\mathbf{v}\|}{c} = \beta \quad \mathbf{b}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{u} \\ -\bar{\mathbf{u}} & 0 \end{bmatrix} \in \text{End}(F)$$

avec $c = \text{la célérité de la lumière}$

$$\tilde{\Lambda} = \exp(\alpha \mathbf{b}_u) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_E + (\text{ch } \alpha - 1) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} & -\text{sh } \alpha \mathbf{u} \\ -\text{sh } \alpha \bar{\mathbf{u}} & \text{ch } \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_E + \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} & -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{u} \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \bar{\mathbf{u}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{V-9})$$

D'autre part, il est possible que nous ayons besoin de l'application inverse: $\tilde{\Lambda}^{-1}$ de $\tilde{\Lambda}$ qui s'exprime de la même façon à un signe près: positif sur les termes anti-diagonaux.

$$\tilde{\Lambda}^{-1} = \exp(-\alpha \mathbf{b}_u) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_E + (\text{ch } \alpha - 1) \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} & \text{sh } \alpha \mathbf{u} \\ \text{sh } \alpha \bar{\mathbf{u}} & \text{ch } \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_E + \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{u}} & \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \mathbf{u} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \bar{\mathbf{u}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{V-10})$$

Le vecteur unitaire: \mathbf{u} représente la direction du déplacement des deux galiléens et le signe représente l'orientation du deuxième galiléen par rapport au premier.

Nous poursuivons notre étude en supposant que les deux galiléens G et G' sont en translation constante l'un par rapport à l'autre. Nous avons vu précédemment que ces deux observateurs peuvent s'exprimer et comparer les résultats de leurs travaux sur le ou les mêmes phénomènes se développant dans l'Univers. Nous avons admis que les deux galiléens sont en translation constante l'un par rapport à l'autre qui se traduit par la relation en vitesse:

$$\forall m \in \dot{G} \text{ et } \forall m' \in \dot{G}' \Rightarrow \mathbf{v}^G(m') = -\mathbf{v}^{G'}(m) = \text{constante } \mathbf{v} \in E$$

Le diagramme (figure n° V-1) étant présenté, nous pouvons commencer nos premières explications en traitant directement sous forme différentielle. Le but ici est d'accéder directement aux espaces vectoriels associés à l'Univers et aux Galiléens G et G' pour exprimer l'évolution d'une particule sur sa ligne d'Univers.

Analyse différentielle

Nous reprenons la relation (V-4) sous forme différentielle, cela nous permet d'accéder à l'élément infinitésimal de longueur parcouru par la particule sur sa ligne d'Univers. Pour cela, il suffit de remplacer les vecteurs quelconques de cette relation par des vecteurs de faible longueur "infinitésimale", tangents à la ligne d'Univers de la particule. Ainsi, nous obtenons un résultat équivalent à celui de la relation (V-4), à ceci près qu'il nous sera possible de calculer le chemin parcouru par la particule dans l'Univers, si nous savons effectuer l'intégration (ce n'est pas notre intention actuellement).

correspond au carré de la célérité de la lumière. Ainsi, le carré scalaire de la vitesse d'univers de toute particule est une constante: c^2 . Nous retrouvons ce résultat en utilisant les relations (III-4), (V-11), (V-14) et (V-15).

$$g_{\mathcal{U}}(\mathbf{V}_{\mathcal{U}})(\mathbf{V}_{\mathcal{U}}) = \overline{\mathbf{V}}_{\mathcal{U}} \cdot \mathbf{V}_{\mathcal{U}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{V}_{\mathcal{U}} | \mathbf{V}_{\mathcal{U}} \rangle_{\mathcal{U}} = \left(\frac{dS_{\mathcal{U}}}{d\tau} \right)^2 = c^2 \quad (\text{V-16})$$

Vecteur quantité de mouvement d'une particule

Pour obtenir le vecteur quantité de mouvement nous multiplions le vecteur vitesse d'Univers de une quelconque particule par un scalaire: m_0 (qui est la masse d'univers de la particule considérée). Ce vecteur quantité de mouvement dans \mathcal{U} peut s'exprimer suivant les galiléens comme suit.

$$P_{\mathcal{U}} = m_0 \mathbf{V}_{\mathcal{U}} = m_0 \frac{d\eta}{d\tau} = \tilde{\mathfrak{H}} \begin{pmatrix} m_0 \frac{d\mathbf{m}}{d\tau} \\ m_0 \frac{d\lambda}{d\tau} \end{pmatrix} = \tilde{\mathfrak{H}}' \begin{pmatrix} m_0 \frac{d\mathbf{m}'}{d\tau} \\ m_0 \frac{d\lambda'}{d\tau} \end{pmatrix} \quad (\text{V-17})$$

Il est encore possible de mettre en forme ces résultats pour mettre en évidence la masse relativiste vue par les galiléens. En effet, il faut pour cela utiliser la définition du temps propre vu dans la relation (V-14).

$$\text{En posant} \quad m = \frac{m_0}{\{1 - \gamma^2\}^{1/2}} \quad \text{et} \quad m' = \frac{m_0}{\{1 - \gamma'^2\}^{1/2}} \quad (\text{V-18})$$

$$P_{\mathcal{U}} = m_0 \mathbf{V}_{\mathcal{U}} = m_0 \frac{d\eta}{d\tau} = \tilde{\mathfrak{H}} \begin{pmatrix} m\mathbf{v} \\ m c \end{pmatrix} = \tilde{\mathfrak{H}}' \begin{pmatrix} m'\mathbf{v}' \\ m' c \end{pmatrix}$$

Remarquons que les vitesses \mathbf{v} et \mathbf{v}' sont les vitesses classiques de la particule notée N suivant les deux galiléens G et G'. Nous pouvons remplacer dans la relation (V-18) les vitesses \mathbf{v} et \mathbf{v}' par respectivement $\mathbf{v} = \mathbf{v}(N)$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(N)$ et les introduire dans les quantités de mouvement classiques: $m\mathbf{v} = p(N)$ et $m'\mathbf{v}' = p'(N)$. Cela permet de simplifier la dernière ligne de la relation (V-18).

$$P_{\mathcal{U}} = m_0 \mathbf{V}_{\mathcal{U}} = m_0 \frac{d\eta}{d\tau} = \tilde{\mathfrak{H}} \begin{pmatrix} p(N) \\ m c \end{pmatrix} = \tilde{\mathfrak{H}}' \begin{pmatrix} p'(N) \\ m' c \end{pmatrix} \quad (\text{V-19})$$

Nous proposons des simplifications (sans nuire à notre raisonnement) dans la suite de notre étude. En effet, nous ne prendrons en compte qu'un seul galiléen pour améliorer la compréhension. Il est bien évident que l'on peut toujours revenir à l'étape précédente. Nous venons de définir la quantité de mouvement d'une particule relativiste N.

Il ne reste plus pour achever notre étude, qu'à détailler l'équation fondamentale de la mécanique, de reconnaître la force (la plus simple) d'Univers agissant sur cette particule et d'identifier les propriétés géométriques du mouvement.

Le principe fondamental de la mécanique relativiste

Ce principe est assez simple, il stipule que la dérivée par rapport au temps propre de la quantité de mouvement de la particule N: $\frac{dP_{\mathcal{U}}}{d\tau}$ est égale à la force \mathcal{F} d'Univers qui agit sur elle.

Cette force s'écrit aussi suivant le Galiléen G:

$$m_0 \frac{dV}{d\tau} = \frac{dP_u}{d\tau} = \mathcal{F} = \tilde{\mathfrak{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \sqrt{1-\gamma^2} \\ \xi \\ \sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix} \quad (V-20)$$

Ici \mathbf{f} est la composante dans E, tandis que ξ est la composante sur R

Si nous tenons compte que le carré scalaire de la vitesse d'Univers de la particule N est égal au carré de la vitesse de la lumière, il est facile de voir que la force d'Univers agissant sur N est colinéaire à l'accélération d'Univers. La force et l'accélération d'univers sont orthogonales à la vitesse d'Univers de la particule [Lan et al-70], [Hen-2000]. Nous pouvons rassembler cela dans la relation qui suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle V_u | V_u \rangle_u = m_0 c^2 \Rightarrow \frac{dm_0 c^2}{d\tau} = 2 \left\langle \frac{m_0 dV_u}{d\tau} | V_u \right\rangle_u = 0 \\ \text{La relation (V-20)} \Rightarrow \frac{m_0 dV_u}{d\tau} = \mathcal{F} \text{ alors } \langle \mathcal{F} | V_u \rangle_u = 0 \end{array} \right\}$$

Nous identifions ξ en effectuant le produit scalaire $\langle \mathcal{F} | V_u \rangle_u = 0$ En posant

$$\frac{dP_u}{d\tau} = \tilde{\mathfrak{H}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{dp(N)}{dt} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{d(mc)}{dt} \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{F} = \tilde{\mathfrak{H}} \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \sqrt{1-\gamma^2} \\ \xi \\ \sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix} \quad (V-21)$$

$$- \langle \mathbf{f} | \mathbf{v}(N) \rangle_E + c \cdot \xi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{\langle \mathbf{f} | \mathbf{v}(N) \rangle_E}{c}$$

$$\frac{dP_u}{d\tau} = \mathcal{F} \Rightarrow \text{(a)} \Rightarrow \frac{dp(N)}{dt} = \mathbf{f} \text{ et } \text{(b)} \Rightarrow \langle \mathbf{f} | \mathbf{v}(N) \rangle_E = \frac{d(m c^2)}{dt}$$

Dans la relation fondamentale galiléenne (a) la force \mathbf{f} n'est pas colinéaire à l'accélération galiléenne. Cela permet de montrer la liaison entre la force galiléenne: \mathbf{f} et le produit : masse par accélération galiléenne de la particule N. Grâce aux deux relations (a) et (b), nous disposons de cette liaison.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{\langle \mathbf{f} | \mathbf{v} \rangle_E}{c^2} \mathbf{v}$$

En remplaçant \mathbf{v} la vitesse de la particule N par $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot \mathbf{u}_v$

(V-22)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[I_E - \gamma^2 \underline{\mathbf{u}}_v \cdot \underline{\mathbf{u}}_v \right] (\mathbf{f})$$

Le théorème de l'énergie puissance

Enfin la formule fondamentale (b) de la relation (V-21) conduit à définir l'énergie d'une particule N relativement à un galiléen fixé sous la forme : $W(N) = m c^2 = T^G(N) + C^{te}$. Nous allons montrer que l'énergie W met en évidence l'énergie cinétique de la particule, grâce à la forme de la masse vue dans (V-18): $m = \frac{m_0}{\{1-\gamma^2\}^{1/2}}$ et du développement suivant γ^2 .

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \Rightarrow \langle f | v(N) \rangle_E &= \frac{d(m c^2)}{dt} \Rightarrow W = m c^2 = T^G(N) + C^{te} \\
m c^2 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\langle v | v \rangle_E}{c^2}}} = \underbrace{m_0 c^2}_{C^{te}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 \langle v | v \rangle_E}_{\text{énergie cinétique classique}} + \dots \text{termes en } m_0 \left(\frac{\langle v | v \rangle_E}{c^2} \right)^n \dots \\
&\hspace{15em} T^G(N)
\end{aligned} \tag{V-23}$$

Il en résulte finalement $T^G(N) = (m - m_0)c^2$
L'énergie de la particule dans le galiléen G est réduite lorsque
l'énergie cinétique s'annule $\Rightarrow W_0 = m_0 c^2$ *c'est l'énergie de repos*

Commentaires

- Nous venons de voir que toute particule dans l'univers possède une énergie de repos [Lan et al-70].

- La mise en forme de la relativité restreinte a été possible grâce aux seules définitions des espaces \mathcal{U} et F munis de leur couplage interne garantissant le produit scalaire déjà étudiées dans les relations (III-1) à (III-4).

- Il a suffi d'imposer que la quatrième composante différentielle dans F soit la forme $d\lambda = c dt$. Il va s'en dire que ceci est possible, car nous avons fait l'hypothèse (sans le signaler) de l'isotropie dans l'Univers de la célérité de la lumière ou bien encore que la propagation de la lumière est la même dans toutes les directions.

- Nous n'avons pas utilisé tous les opérateurs différentiels présentés dans le paragraphe IV, à l'exception de la dérivée par rapport au temps propre relié au temps classique déjà vu dans la relation (V-14).

- En clair, lorsque nous avons parlé de force d'Univers dans l'équation fondamentale de la mécanique relativiste, nous n'avons pas introduit d'hypothèse supplémentaire comme par exemple la notion de potentiel. Cela aurait fait appel alors à la notion de gradient (point de départ minimum d'utilisation des opérateurs du paragraphe IV), ce n'était pas le cas traité ici.

- V-II Aspect covariant des équations de Maxwell

Introduction

Nous revisitons l'électromagnétisme par les équations de Maxwell d'une particule dans le vide. Cette étude à la différence de la précédente fera intervenir en plus une bonne partie des opérateurs différentiels obtenus dans le paragraphe IV. Il apparaîtra les notions de champ électrique: \mathbf{e} et de champ électromagnétique: \mathbf{b} .

Nous allons tout d'abord présenter les équations microscopiques de Maxwell-Lorentz [Lan et al-69], [[Lan et al-70], [Sed-75], [Gin-78] dans le vide. Ces équations sont données dans un galiléen G , elles se scindent en deux groupes.

$$\begin{aligned}
\text{(1)} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_x \mathbf{b} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v} \\ \text{div}_x \mathbf{e} = 4\pi \rho \end{array} \right\} \quad \text{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_x \mathbf{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0 \\ \text{div}_x \mathbf{b} = 0 \end{array} \right\} \tag{V-24}
\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux deux équations du groupe (1) de la relation (V-24), elles font intervenir des assemblages de dérivations particulières des champs électrique: \mathbf{e} et magnétique: \mathbf{b} , tandis que ρ apparaît dans les seconds membres. Il représente la densité de courant vue dans G.

Le vecteur courant d'Univers d'une particule

En fait cette densité de courant: ρ est liée à l'existence d'une densité ρ_0 constante de courant d'Univers. Nous voyons apparaître par dérivation suivant le temps propre la vitesse d'Univers de la particule multipliée par le coefficient $\frac{4\pi\rho_0}{c}$.

$$\begin{aligned} \text{En posant } \Rightarrow \rho &= \rho_0 \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad \text{nous avons à partir de (1)} \\ \tilde{\mathfrak{H}} \left(\begin{array}{c} - \left[\text{rot}_x \{-\mathbf{b}\} + \frac{\partial \mathbf{e}}{c \partial t} \right] \\ \text{div}_x \mathbf{e} \end{array} \right) &= \frac{4\pi\rho_0}{c} \tilde{\mathfrak{H}} \left(\begin{array}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dt\sqrt{1-\gamma^2}} \\ \frac{d\lambda}{dt\sqrt{1-\gamma^2}} \end{array} \right) = \frac{4\pi\rho_0}{c} \mathbf{V}_u \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_u \end{aligned} \quad (\text{V-25})$$

Ici \mathbf{J}_u est le vecteur courant d'Univers de la particule

Dans cette relation, le membre de gauche fait apparaître $\tilde{\mathfrak{H}}$ appliqué à un vecteur de F qui est tout simplement le premier membre de (1) vu dans la relation (V-24)) et nous avons mis le signe moins pour la totalité du vecteur de E. Il apparaît que le membre de gauche représente l'adjoint de la divergence du champ d'endomorphisme: $\boldsymbol{\varphi}$ de \mathcal{U} . Il existe alors un endomorphisme: \mathbf{f} de F, tel que $\boldsymbol{\varphi} = \tilde{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathfrak{H}}^{-1}$. Reportons-nous à la relation (IV-8) qui fournit le vecteur associé à la divergence de l'endomorphisme: $\boldsymbol{\varphi}$ dans \mathcal{U} . Rappelons cette relation, elle permettra l'identification compacte et universelle du premier membre dans \mathcal{U} .

$$\text{Dans } \mathcal{U} \quad \overline{\text{Div}}_v \boldsymbol{\varphi}(1) = \tilde{\mathfrak{H}} \cdot \mathbf{U} \cdot \overline{\text{Div}}_m \mathbf{f}(1) = \tilde{\mathfrak{H}} \left(\begin{array}{c} - \left(\overline{\text{Div}}_x \mathbf{f}_1 + \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \lambda} \right) \\ \text{div}_x \mathbf{f}_2 + \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \lambda} \end{array} \right) (1) \in \mathcal{U} \quad (\text{IV-8 bis})$$

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, nous confondons le contravecteur avec le vecteur, dès lors, nous reconnaissons dans la relation (IV-8 bis) la divergence de $\boldsymbol{\varphi}$ qui représente le membre de gauche de la relation (V-25). Il est facile d'identifier les composantes de \mathbf{f} . Tout cela est mentionné dans la relation qui suit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{H}} \left(\begin{array}{c} - \left[\text{rot}_x \{-\mathbf{b}\} + \frac{\partial \mathbf{e}}{c \partial t} \right] \\ \text{div}_x \mathbf{e} \end{array} \right) &= \tilde{\mathfrak{H}} \left(\begin{array}{c} - \left(\overline{\text{Div}}_x \mathbf{f}_1 + \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \lambda} \right) \\ \text{div}_x \mathbf{f}_2 + \frac{\partial \mathbf{f}_4}{\partial \lambda} \end{array} \right) = \overline{\text{Div}}_v \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{J}_u \in \mathcal{U} \\ \text{Par identification, nous obtenons les composantes de } \mathbf{f} & \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_x \{-\mathbf{b}\} = \overline{\text{Div}}_x \mathbf{f}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{c \partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \lambda} \\ \text{div}_x \mathbf{e} = \text{div}_x \mathbf{f}_2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_1 = \mathbf{j}_E(-\mathbf{b}) \\ \mathbf{f}_3 = \bar{\mathbf{e}} \\ \mathbf{f}_2 = \mathbf{e} \\ \mathbf{f}_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_E(-\mathbf{b}) & \mathbf{e} \\ \bar{\mathbf{e}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V-26})$$

Dans cette relation, la première ligne représente le système d'équations (1); de ce fait nous obtenons une relation dans l'Univers suivante: "le vecteur courant d'Univers: $\mathbf{J}_{\mathcal{U}}$ d'une particule dans le vide est égal au vecteur associé à la divergence d'un champ d'endomorphisme d'Univers: φ ". Ceci s'écrit sous la forme compacte suivante

$$\overline{\text{Div}}_{\mathcal{U}} \varphi = \mathbf{J}_{\mathcal{U}} .$$

La forme de l'endomorphisme \mathbf{f} de F est spéciale afin de valider le système d'équations (1). Existe-t-il une source plus profonde ?

Potentiel vecteur électromagnétique d'Univers d'une particule

Il reste une question à traiter : comment se fait-il que nous soyons obligés de disposer d'un champ d'endomorphisme de \mathcal{U} à forme particulière pour définir le vecteur courant $\mathbf{J}_{\mathcal{U}}$? Est-ce que cet endomorphisme n'est pas la "dérivation" d'un champ à valeurs vectorielles?

Nous proposons de traiter cela, par le biais de **l'existence d'un potentiel vecteur de l'Univers**. Il permettra par dérivation, et une opération supplémentaire de remplacer: φ .

Soit le potentiel vecteur : η de \mathcal{U} défini par $\eta = (\varphi)(v)$ tel que : $\eta = \tilde{\mathfrak{R}}(\mathbf{n})$ où $\mathbf{n} = \psi(m)$ est l'antécédent dans F . Nous avons le champ "dérivé": $(\varphi)'(v) = \frac{\partial \eta}{\partial v} = \tilde{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m} \tilde{\mathfrak{R}}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, Il

introduit le champ "dérivé" de F : $(\psi)'(m) = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial m}$. Tandis que l'opération supplémentaire

consiste ; à construire l'endomorphisme anti-auto-adjoint dans \mathcal{U} : $\frac{\partial \eta}{\partial v} - \overline{\frac{\partial \eta}{\partial v}}$.

L'un des auteurs** avait proposé (à l'époque) d'écrire par définition: $\frac{\partial \eta}{\partial v} - \overline{\frac{\partial \eta}{\partial v}} = \mathbf{Rot}(\varphi)(v)$.

Nous calculons de la divergence de cet opérateur de \mathcal{U} , en utilisant la relation (IV-14) .

En posant $\mathbf{h}_2 = \text{grad}_x \mu + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda}$ - voir la relation (IV-14)

$$\overline{\text{Div}}_{\mathcal{U}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial v} - \overline{\frac{\partial \eta}{\partial v}} \right) = \overline{\text{Div}}_{\mathcal{U}} (\mathbf{Rot}_v(\varphi)(v)) = \tilde{\mathfrak{R}} \left(- \begin{pmatrix} \text{rot}_x \text{rot}_x \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \lambda} \\ \text{div}_x \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{U} \quad (\text{IV-14})$$

Il est maintenant facile d'identifier les champs : électrique: \mathbf{e} et magnétique: \mathbf{b} .

En reprenant la première ligne de la relation (V - 26). Nous avons

$$\tilde{\mathfrak{R}} \left(- \begin{pmatrix} \text{rot}_x \{-\mathbf{b}\} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \\ \text{div}_x \mathbf{e} \end{pmatrix} \right) = \tilde{\mathfrak{R}} \left(- \begin{pmatrix} \text{rot}_x \text{rot}_x \mathbf{y} + \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \lambda} \\ \text{div}_x \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} \right) = \mathbf{J}_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U} \quad (\text{V-27})$$

Par identification, nous obtenons directement les valeurs de \mathbf{b} et de \mathbf{e}

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_x \{-\mathbf{b}\} = \text{rot}_x \text{rot}_x \mathbf{y} \\ \text{div}_x \mathbf{e} = \text{div}_x \mathbf{h}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{b} = \text{rot}_x \mathbf{y} \\ \mathbf{e} = \mathbf{h}_2 = \text{grad}_x \mu + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \end{array} \right\}$$

Nous savons maintenant qu'un potentiel vecteur d'univers permet d'identifier le vecteur courant d'Univers sous forme covariante ou universelle grâce au système d'équations (1).

$$\overline{\text{Div}_v(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\eta}}}{\partial v})} = \overline{\text{Div}_v(\mathbf{Rot}_v(\varphi)(v))} = \mathbf{J}_u \quad (\text{V-28})$$

D'autre part, cette universalité entraîne la vérification automatique du système d'équations (2) de la relation (V-24). Ce résultat a été confirmé [Gin-78]. En d'autres termes, l'existence d'un potentiel vecteur d'Univers permet de satisfaire les deux systèmes d'équations vus dans la relation (V-24). Ce quadri-potentiel d'Univers est-t-il unique ? Non, car le champ $\boldsymbol{\eta}$ est défini à un champ de gradient χ près, de la manière suivante :

Les potentiels vectoriels suivants vérifient la relation (V-27)

$$\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta} - \text{grad}_v \chi = \tilde{\mathfrak{R}} \left(\begin{matrix} y' \\ \mu' \end{matrix} \right) = \tilde{\mathfrak{R}} \left(\begin{matrix} y + \text{grad}_x \chi \\ \mu - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{matrix} \right) \quad (\text{V-29})$$

Dans le cadre de l'astrophysique, une hypothèse supplémentaire est faite afin de rechercher des solutions de type ondes tel que $\text{div}_v \boldsymbol{\eta} = 0$. Alors, le vecteur courant d'Univers \mathbf{J}_u vérifie l'équation des ondes ou le Laplacien de $\boldsymbol{\eta}$ déjà vu dans la relation (IV-15)

$$\overline{\text{Div}_v(-\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v})} = -\Delta(\varphi)(v) = \tilde{\mathfrak{R}}(\boxtimes_{m,n}) = \mathbf{J}_u \quad (\text{V-30})$$

Ce résultat est utilisé pour la mise en oeuvre de l'hamiltonien de l'électrodynamique classique dans le vide [Gin-78]. Pour l'électromagnétisme, les potentiels vectoriels définis par la relation (V-29) sont admissibles, ils vérifient la relation (V-30), si le champ scalaire: χ admet la condition: $\boxtimes(\chi) = 0$.

Commentaires

- Pour une particule dans le vide, les équations de Maxwell (microscopiques) ont été présentées de façon élégante dans l'Univers par l'intermédiaire de calculs dans un Galiléen.
- Le courant d'Univers: \mathbf{J}_u est conservé dans \mathcal{U} , si la divergence de ce courant est nulle, ce que confirme la relation (IV-16).

$$\overline{\text{div}_v\{\text{Div}_v(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial v} - \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\eta}}}{\partial v})\}} = \overline{\text{div}_v\{\text{Div}_v(\mathbf{Rot}_v(\varphi)(v))\}} = \text{div}_v(\mathbf{J}_u) = 0 \quad (\text{V-31})$$

- Il reste cependant, le traitement de l'électromagnétisme macroscopique [Lan et al-69], [Lan et al-70], [Sed-75], [Sou-82], [Hen-2000]. Ce cas n'est pas traité ici car, notre but était de montrer l'intérêt des opérateurs différentiels présentés dans le paragraphe IV.

- VI - CONCLUSIONS

Notre étude éclaire d'une autre lumière la construction d'espaces quadridimensionnels, ainsi que les opérateurs différentiels intrinsèques nécessaires aux traitements de la physique contemporaine. L'intérêt est montré dans les résultats des formules concises et élégantes des phénomènes physiques apparaissant dans l'Univers \mathcal{U} .

Les observateurs munis de leur espace Galiléen sont capables de rendre compte de leurs observations, si leurs résultats mesurés et formulés, une fois transférés dans \mathcal{U} sont identiques - c'est **la covariance des écritures**.

Nous avons orienté, à l'époque, nos applications aux phénomènes pris en compte par la relativité restreinte. D'autres branches de la physique peuvent être incluses dans notre proposition, citons - les ondes sonores en mécanique des fluides et des milieux solides [**Lan et al-71**, **Sed-75**] - l'électrodynamique des milieux continus [**Lan et al-69**], [**Gin-78**], la thermodynamique macroscopique des milieux électrisés [**Fer-71**] - et la mécanique des milieux continus relativistes [**Vall-87**].

Enfin, les équations microscopiques de Maxwell ont mis en évidence l'existence le quadri-potential: φ . Ce dernier est défini à un champ scalaire près, dont le gradient joue un rôle important dans la relation (V-29). Nous montrons l'invariance des champs: \mathbf{e} et \mathbf{b} , si les composantes du vecteur: \mathbf{n} sont : $\mathbf{y}' = \mathbf{y} + \text{grad}_x \chi$ et $\mu' = \mu - \frac{\partial \chi}{c \partial t}$ [**Gin-78**]. Il existe bien une famille de solutions qui conservent le champ électrique: \mathbf{e} et le champ magnétique: \mathbf{b} pour une particule.

Des travaux ont été déjà entrepris dans le cadre de la mécanique relativiste des milieux continus déformables [**Vall-87**]. Cette voie de recherche reste à être poursuivie pour disposer d'un cadre thermodynamique limite bien défini concernant tout élément de matière.

- VII - BIBLIOGRAPHIE

[**Car-33**] - **Cartan E.** - Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire - les espaces de Finsler- Collection Actualités Scientifiques et Industrielles n° 72 et 79 dans la série "exposés de géométrie" dirigée par Elie Cartan -1933, réédité sous le titre "Exposés de Géométrie" par Hermann-Paris 1971.

[**Car-45**]- **Cartan E.** - Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques; Collection Actualités Scientifiques et Industrielles n° 994 - 1945, réédité sous le même titre par Hermann-Paris 1971.

[**Car-51**] - **Cartan E.** - Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Gauthier-Villars-Paris 1951.

[**Sou-58**] - **Souriau J.M.** - La relativité variationnelle. Publications Scientifiques de l'Université d'Alger, Série A, Mathématiques, tome V, n°2, pp-103-171, Imprimerie Durand-Chartres, 1958.

[**Car-58**] - **Cartan E.** - Leçons sur les invariants intégraux. Hermann - Paris 1958.

[**Sou-64a**] - **Souriau J.M.** - Calcul linéaire, Tome I, P.U.F, Paris, 1964.

[**Sou-64b**] - **Souriau J.M.** - Géométrie et Relativité, Hermann, Paris, 1964.

[**Sou-65**] - **Souriau J.M.** - Calcul linéaire, Tome II, P.U.F, Paris, 1965.

[**Abr-67**] - **Abraham R.** - Foundations of Mechanics. The Mathematical Physics Monograph Series . A.S. Wightman, Editor.W. A. BENJAMIN, INC., Massachusetts, 1967.

- [Pha-68] - **Pham Mau Quan**. - Introduction à la géométrie des variétés différentiables. Dunod Paris, 1968.
- [Lan et al-69] - **Landau. L et Lifchitz. E** . - Électrodynamique des milieux continus. Éditions Mir- Moscou, 1969.
- [Lan et al-70] - **Landau. L et Lifchitz. E** . - Théorie des champs. Éditions Mir- Moscou, 1970.
- [Sou-70] - **Souriau J.M.** - Structure des systèmes dynamiques, Dunod Université, Paris, 1970.
- [Fer-71] - **Fer F.** - Thermodynamique Macroscopique. Documents de Chimie, tome 1. Gordon-Breach, Paris - 1971.
- [Lan et al-71] - **Landau. L et Lifchitz. E** . - Mécanique des fluides. Éditions Mir- Moscou, 1971.
- [CdG-72] - **Chastenet de Géry J.** - Complément d'algèbre et d'analyse linéaire. Riber, Paris, 1972.
- [Sis-74] - **Sisson J.C.** - Torseurs affines et applications à la mécanique du solide. Mémoire d'Ingénieur CNAM - Paris, 1974.
- [Dah-74] - **Dahan N.** - Un aspect de l'analyse des milieux déformables. Mémoire d'Ingénieur CNAM - Paris, 1974.
- [Sed-75] - **L. Sedov** - Mécanique des milieux continus. Tome -1. Édition de Moscou, 1975.
- [Val-77] - **Valid R.** - La mécanique des milieux continus et le calcul des structures. Eyrolles-Paris, 1977.
- [Gin-78] - **V. Ginzburg** - Physique théorique et Astrophysique. Édition de Moscou, 1978.
- [Dou et al-79] - **B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko** - Géométrie Contemporaine - Méthodes et Applications, Tome -1, Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. Édition de Moscou, 1979.
- [Sou-82] - **Souriau J.M.** - Physique et Géométrie.-"La Pensée Physique Contemporaine"- Science et Humanisme en Notre Temps, édité par S. Diner, D. Fargue, G. Lochak. Édition Augustin Fresnel, Moulidars, pp. 343-364, 1982.
- [Vall-87] - **Vallée C.** - Lois de comportement des milieux continus dissipatifs compatibles avec la physique relativiste, Doctorat Es Sciences Mathématiques, Université de Poitiers, 1987.
- [Auf-99] - **Auffray J.Paul.** - Einstein et Poincaré sur les traces de la relativité, Édition le Pommier-Fayard, 1999, Paris
- [Hen-2000] - **Henrotte. F** - Modélisation des efforts électromagnétiques et de leurs effets dans les structures quelconques. Thèse de Docteur de l'Université de Liège, Février 2000, Collection des Publications de la Faculté des Sciences Appliquées n° 201.
- [Not-2000] - **Nottale. L.** - La relativité dans tous ses états - *au-delà de l'espace-temps* Collection Pluriel- Hachette Littérature, 2000 Paris.
- [Dah 2000] - **N.Dahan** - Rôle de la métrique dans l'analyse des milieux continus déformables. Habilitation à Diriger les Recherches. Université Paris VI, Juin 2000.

ANNEXE

COMPLÉMENTS SUR LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Nous avons déjà traité dans le paragraphe V, la Relativité Restreinte limitée aux rôles de deux observateurs Galiléens, nous allons montrer qu'il est possible de la traiter avec trois Galiléens. Tout d'abord mettons en valeur le problème de composition des vitesses associées à deux Galiléens suivant le diagramme de la figure V-1. Pour cela, rappelons les relations différentielles entre les Galiléens G et G'.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall d\eta \in \mathcal{U} \text{ il existe } \left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{m} \in F \\ d\mathbf{m}' \in F' \end{array} \right\} \Rightarrow d\eta = \tilde{\mathfrak{H}}(d\mathbf{m}) = \tilde{\mathfrak{H}}'(d\mathbf{m}') \\ \text{avec } d\mathbf{m} = \begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ d\lambda \end{pmatrix}; d\mathbf{m}' = \begin{pmatrix} d\mathbf{x}' \\ d\lambda' \end{pmatrix} \text{ et } d\lambda = c dt; d\lambda' = c dt' \\ \exists \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} A & C \\ L & s \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(F, F'); d\mathbf{m} \in F \Rightarrow d\mathbf{m}' = \tilde{\mathbf{A}}(d\mathbf{m}) \end{array} \right. \quad (\text{A-1})$$

Nous obtenons finalement, les formules de composition des vitesses dans G' par rapport à G et vice versa.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{m}'}{dt'} = c \frac{A \frac{d\mathbf{m}}{dt} + C c}{L \frac{d\mathbf{m}}{dt} + s c} \quad \text{si: } \frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{m}'}{dt'} = \frac{c C}{s} \\ \Downarrow \\ \text{C'est la vitesse dans G' d'une particule fixe dans G} \\ \frac{d\mathbf{m}}{dt} = c \frac{\bar{A} \frac{d\mathbf{m}'}{dt'} - \bar{L} c}{-\bar{C} \frac{d\mathbf{m}'}{dt'} + s c} \quad \text{si: } \frac{d\mathbf{m}'}{dt'} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\frac{c \bar{L}}{s} \\ \Downarrow \\ \text{C'est la vitesse dans G d'une particule fixe dans G'} \end{array} \right. \quad (\text{A-2})$$

Nous vérifions qu'à partir des formules générales, nous retrouvons bien les cas classiques avec la particule est fixe dans G ou bien fixe dans G', tout en tenant compte de la valeur des composantes de $\tilde{\mathbf{A}}$ déjà vues dans la relation (V-10).

Si nous introduisons, un autre Galiléen: G'' et une autre opération de translation à vitesse constante entre les Galiléens G' et G'', il en résulte que:

$$v_1^{G'}(P'') = -v_1^{G''}(P')$$

Il reste une question à résoudre - Peut-on relier le Galiléen G au Galiléen G''?

C'est ce que nous allons entreprendre maintenant.

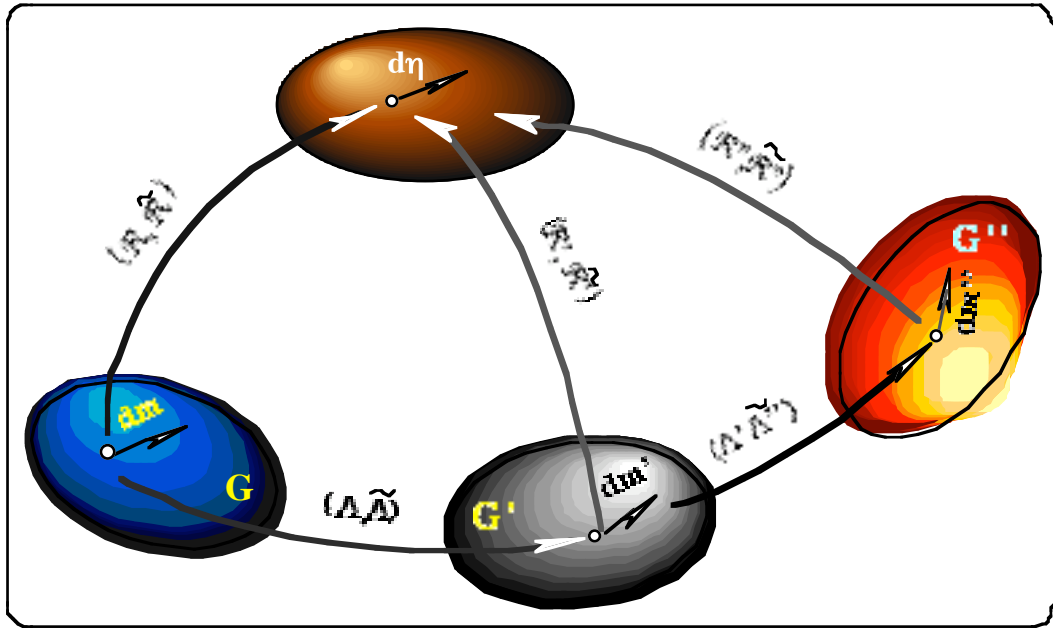


Figure A - 1 Diagramme entre deux Observateurs et l'Univers"

Nous avons vu dans le paragraphe V-1 que le Galiléen G était relié par une "transformation de Lorentz": (de type translation) au Galiléen G'. Nous avons imposé aussi entre G' et G" une "transformation de Lorentz": $\tilde{\Lambda}'$ de même type. La composition de ces deux transformations de Lorentz est plus complexe et elle appartient au groupe de Lorentz. Cette transformation est représentée par : $\tilde{\Lambda}'' = \tilde{\Lambda}' \cdot \tilde{\Lambda}$.

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\Lambda} &= \begin{bmatrix} A & C \\ L & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_E + (\text{ch } \alpha - 1)\underline{u}\underline{u} & -\text{sh } \alpha \underline{u} \\ -\text{sh } \alpha \underline{u} & \text{ch } \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(F, F') \\
 \tilde{\Lambda}' &= \begin{bmatrix} A' & C' \\ L' & s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_E + (\text{ch } \alpha' - 1)\underline{u}'\underline{u}' & -\text{sh } \alpha' \underline{u}' \\ -\text{sh } \alpha' \underline{u}' & \text{ch } \alpha' \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(F', F'') \\
 \text{Alors } \tilde{\Lambda}'' &= \tilde{\Lambda}' \cdot \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} A' \cdot A + C' \cdot L & A' \cdot C + s' \cdot C' \\ L' \cdot A + s' \cdot L & L' \cdot C + s' \cdot s \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(F, F'')
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

Tous calculs faits nous obtenons la forme générale de la transformation de Lorentz: $\tilde{\Lambda}''$

$$\tilde{\Lambda}'' = \begin{bmatrix} \left[I_E + (\text{ch } \alpha' - 1)\underline{u}'\underline{u}' + (\text{ch } \alpha - 1)\underline{u}\underline{u} \right] & \left[-\text{sh } \alpha \underline{u} - \text{sh } \alpha (\text{ch } \alpha' - 1)\langle \underline{u}' | \underline{u} \rangle_E \underline{u}' \right] \\ \left[+(\text{ch } \alpha' - 1)(\text{ch } \alpha - 1)\langle \underline{u}' | \underline{u} \rangle_E \underline{u}'\underline{u} \right] & \left[-\text{ch } \alpha \text{ sh } \alpha' \underline{u}' \right] \\ \left[-\text{sh } \alpha' \underline{u}' - \text{sh } \alpha (\text{ch } \alpha - 1)\langle \underline{u}' | \underline{u} \rangle_E \underline{u} \right] & \left[\text{sh } \alpha' \text{ sh } \alpha \langle \underline{u}' | \underline{u} \rangle_E + \right] \\ \left[-\text{ch } \alpha' \text{ sh } \alpha \underline{u} \right] & \left[\text{ch } \alpha' \text{ ch } \alpha \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

Il apparaît le cosinus de l'angle formé par les vecteurs \underline{u} et \underline{u}' , grâce au produit scalaire des deux vecteurs. Cette transformation prend en compte une translation et une rotation suivant la représentation générale du théorème vu dans la relation (V-8).

Cependant un cas particulier existe, lorsque \underline{u} et \underline{u}' sont colinéaires ; ils sont égaux. Dès lors, une simplification dans les composantes de $\tilde{\Lambda}''$ s'impose. Cette transformation prend une forme simple, sous la forme exponentielle $\tilde{\Lambda}'' = \exp([\alpha + \alpha']\mathbf{b}_U)$. Alors G' et G" ont même direction.