Sur les coefficients de Laurent de la fonction zêta harmonique

Bernard Candelpergher et Marc-Antoine Coppo

Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR 7351), Nice, France

Résumé. Dans cette étude, on détermine les constantes intervenant dans le développement de Laurent des fonctions zêta harmoniques en utilisant le procédé de sommation de Ramanujan des séries divergentes.

Introduction

Il est bien connu que la fonction ζ de Riemann est analytique dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et qu'au voisinage de $s = 1$, on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1)\,,$$

où γ désigne la constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} - \ln n\right) = 0.5772156649\ldots$$

Le procédé de sommation de Ramanujan (cf. [Can]) permet de sommer la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ pour toutes les valeurs de s : si $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n^s}$ désigne la somme de la série au sens de Ramanujan, on a la relation ([Can, Eq. (1.22)])

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \qquad \text{pour } s \neq 1,$$

et la somme $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n}$ n'est rien d'autre que la constante d'Euler γ ([Can, Eq. (1.24)]).

Il est alors naturel, pour une fonction holomorphe $f(s)$ définie dans un demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ par une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}$ et dont le prolongement méromorphe admet un pôle en $s = a$, d'étudier comment sont reliées entre-elles la somme de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^a}$ au sens de Ramanujan et la constante C_a intervenant dans le développement de Laurent

$$f(s) = \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{1}{(s-a)^n} + C_a + \sum_{n\geq 1} c_n (s-a)^n$$

au voisinage de ce pôle.

Pour examiner cette question, on considère d'abord le cas (relativement simple) de la fonction analytique ζ_H définie dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^s}\,,$$

où $H = (H_n)$ désigne la suite des nombres harmoniques. Apostol et Vu ([AV]) et Matsuoka ([M]) ont montré que cette fonction, appelée *fonction zêta harmonique*, se prolongeait en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ admettant le pôle double $a = 1$ et les pôles simples $a = 0$ et $a = 1 - 2k$ avec $k \geq 1$. La sommation de Ramanujan permettant de sommer la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{H_n}{n^s}$ pour toutes les valeurs de s, il est alors possible, pour chaque pôle a, d'exprimer la constante C_a à l'aide de la somme $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}\frac{H_n}{n^a}$. Dans le cas des pôles aux entiers négatifs, on retrouve les résultats précédemment obtenus par Boyadzhiev et al. par une autre méthode (cf. [BGP, Corollaires 2 et 3]). Notre méthode a cependant l'avantage de pouvoir reformuler plus agréablement ces résultats, tout en identifiant par la même occasion la constante au pôle double (formule (5)) qui n'avait pas été traitée dans [BGP].

Dans la deuxième partie de l'article, on prolonge notre étude en appliquant la même méthode au cas des fonctions zêta harmoniques d'ordre p, notées ζ_{H^p} où p désigne un entier supérieur ou égal à 2, définies par la suite des nombres harmoniques généralisés (cf. Définition 3). La fonction ζ_{H^p} admet les pôles simples $a = 1$, et $a = m - p$ avec $m = 2, 1, 0, -2, -4, -6$, etc. Dans le cas $p = 2$, on obtient une détermination complète des constantes C_a correspondantes (formules (13)–(17)), ainsi qu'une évaluation des valeurs spéciales de la fonction ζ_{H^2} en $s = 1 - 2k$ pour $k \geq 2$ (formule (20)). Dans le cas général $p \geq 2$, on donne une expression remarquable de la constante C_1 au pôle $a = 1$ de la fonction ζ_{H^p} (formule (22)). Enfin, on indique comment calculer les constantes aux autres pôles de ζ_{H^p} en généralisant la méthode employée dans le cas $p = 2$.

1 La fonction ζ_H

Définition 1. On appelle *fonction zêta harmonique* la fonction analytique ζ_H [1] définie dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^s} \,,$$

avec

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \,.$$

On rappelle que les valeurs spéciales de la fonction ζ_H aux entiers positifs $p \geq 2$ sont données par la célèbre formule d'Euler (cf. [AV, WL]) :

$$2\zeta_H(p) = (p+2)\zeta(p+1) - \sum_{k=1}^{p-2} \zeta(k+1)\zeta(p-k) \qquad (p \geq 2).$$

On rappelle également (cf. [BGP, Eq. (22)]), que les valeurs spéciales de la fonction ζ_H aux entiers négatifs pairs sont données par la formule de Matsuoka [2] :

$$\zeta_H(-2k) = -\frac{B_{2k}}{4k} + \frac{B_{2k}}{2} \qquad (k \geq 1) \,,$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli.

Théorème 1. *Pour* $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$*, la fonction* $\zeta_H(s)$ *peut s'écrire*

$$\zeta_H(s) = \frac{-\pi}{\sin(\pi s)} \zeta(s) - \int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^s}\, dx + \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^s} \,. \tag{1}$$

Démonstration. D'après [Can, Eq. (1.33)], on a pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^s} = \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^s} + \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^s}\, dx \,.$$

D'autre part, comme

$$\psi(x+1) + \gamma = O(x) \text{ en } 0 \,,$$

on peut, pour $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$, décomposer cette dernière intégrale en la différence

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^s}\, dx - \int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^s}\, dx \,.$$

1. La fonction ζ_H est notée H dans [AV] et h dans [BGP].
2. Comme il a été signalé dans [BGP], la valeur $\zeta_H(-2k) = -\frac{B_{2k}}{4k}$ donnée par Apostol et Vu ([AV, Eq. (7)]) est incomplète. La valeur correcte a été donnée par Matsuoka (cf. [BGP, Eq. (16)]) et [M]).

Pour $x \in]-1,1[$, on a le développement en série entière

$$\psi(x+1)+\gamma = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n\,,$$

ce qui nous donne pour $x \in]0,1[$, le développpement en série

$$\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n}\zeta(n+2)x^n\,,$$

qui permet d'évaluer la première intégrale à l'aide du "Ramanujan master's theorem" (cf. [AMS, Théorème 3.2]). On l'applique à la fonction $\varphi(s) = \zeta(s+2)$ qui vérifie les hypothèses du théorème pour $\mathrm{Re}(s) \geq -\delta$ avec $\delta = 1-\varepsilon$, où $0<\varepsilon<1$ est quelconque. Ce qui donne pour $0 < \mathrm{Re}(s) < 1-\varepsilon$,

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}(\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x})\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}\zeta(2-s)\,,$$

ou encore, pour $1+\varepsilon < \mathrm{Re}(s) < 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^s}\,dx = \frac{-\pi}{\sin(\pi s)}\zeta(s)\,.$$

La formule (1) s'en déduit $\square$

Remarque 1. L'expression (1) fournit immédiatement le prolongement méromorphe de la fonction ζ_H dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) < 2$. En effet la fonction

$$s \mapsto \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^s}$$

est analytique dans $\mathbb{C}$ tout entier (cf. [Can, Théorème 9]), et les valeurs de cette fonction aux points $s=-k$ $(k=-1,0,1,2,3,\ldots)$ ne sont autre que les sommes, au sens de la sommation de Ramanujan, de ces séries divergentes.

D'autre part, comme

$$\psi(x+1)+\gamma = O(x) \text{ en } 0\,,$$

la fonction

$$s \mapsto \int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^s}\,dx$$

est analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) < 2$. Seule la fonction

$$s \mapsto \frac{-\pi}{\sin(\pi s)}\,\zeta(s)$$

présente des singularités dans ce demi-plan. Elle admet un pôle double en $s=1$ et des pôles simples en $s=0,-1,-3,-5,\ldots$

1.1 La constante en $s = 1$

Pour obtenir le développement de Laurent de ζ_H en $s = 1$, on commence par donner le développement de la fonction $s \mapsto \dfrac{-\pi}{\sin(\pi s)}\,\zeta(s)$.

Proposition 1. Au voisinage de $s = 1$, on a le développement

$$\frac{-\pi}{\sin(\pi s)}\,\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{(s-1)} + \frac{\pi^2}{6} - \gamma_1 + O(s-1) \tag{2}$$

où γ_1 est la 1ère constante de Stieltjes.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\frac{-\pi}{\sin(\pi s)} = \frac{\pi}{\sin(\pi(s-1))} &= \frac{\exp(i\pi(s-1))}{s-1}\,\frac{2i\pi(s-1)}{\exp(2i\pi(s-1))-1} \\
&= \frac{1}{s-1}\Big(\sum_{k\geq 0} i^k\pi^k\frac{1}{k!}(s-1)^k\Big)\Big(\sum_{k\geq 0} i^k(2\pi)^k\frac{B_k}{k!}(s-1)^k\Big) \\
&= \frac{1}{s-1}\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{i+j=2k}\frac{2^jB_j}{i!j!}\Big)(-1)^k\pi^{2k}(s-1)^{2k} \\
&= \frac{1}{s-1} + \sum_{k\geq 1}(-1)^k\left(\sum_{j=0}^{2k}\frac{2^jB_j}{(2k-j)!j!}\right)\pi^{2k}(s-1)^{2k-1}\,,
\end{aligned}$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli, ce qui donne

$$\frac{-\pi}{\sin(\pi s)} = \frac{1}{s-1} + \frac{\pi^2}{6}(s-1) + \cdots$$

D'autre part, on a aussi

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma - \gamma_1(s-1) + \cdots$$

En effectuant le produit de ces deux développements, on obtient l'identité (2) $\square$

Définition 2. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose

$$\nu_{-p} := (-1)^p\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n+p)}{n}\,.$$

Lemme 1. On a

$$\nu_{-1} = \int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx\,,$$

et pour $p \geq 2$,

$$\nu_{-p} = \int_0^1 \frac{\psi(x+1) + \gamma - \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} \zeta(j+1) x^j}{x^p} \, dx \, .$$

En particulier,

$$\nu_{-2} = \int_0^1 \frac{\psi(x+1) + \gamma - \zeta(2)x}{x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n+2)}{n} \, .$$

Démonstration. Pour $x \in]0\,,1[$, il résulte du développement en série entière

$$\psi(x+1) + \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta(n+1) x^n \, ,$$

que

$$\frac{\psi(x+1) + \gamma}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta(n+1) x^{n-1} \, ,$$

et pour $p \geq 2$,

$$x^{-p}(\psi(x+1) + \gamma - \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} \zeta(j+1) x^j) = \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta(n+1) x^{n-p} \, .$$

Pour tout $0 < a < 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^a x^{-p}(\psi(x+1) + \gamma - \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} \zeta(j+1) x^j) \, dx &= \int_0^a \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-1} \zeta(n+1) x^{n-p} \, dx \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n-p+1} a^{n-p+1} \, , \end{aligned}$$

la permutation des symboles $\int$ et Σ étant justifiée par le fait que

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{\zeta(n+1)}{n-p+1} \, a^{n-p+1} < +\infty \, .$$

Par le critère de Leibniz, la série alternée $\sum_{n \geq p} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n-p+1}$ converge, donc, par le lemme d'Abel pour les séries entières, on a

$$\sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n-p+1} = \lim_{a \to 1} \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n-p+1} \, a^{n-p+1}$$

ce qui donne le résultat voulu. $\square$

Il résulte des formules (1) et (2) le corollaire suivant :

Corollaire 1. Au voisinage de $s = 1$, on a le développement

$$\zeta_H(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{\gamma}{(s-1)} + C_1 + O(s-1)$$

avec

$$C_1 = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \nu_{-1} + \zeta(2) - \gamma_1 \,. \tag{3}$$

On peut simplifier l'expression (3) en utilisant le lemme suivant :

Lemme 2. On a la relation :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \nu_{-1} + \gamma_1 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\zeta(2)}{2} \,. \tag{4}$$

Démonstration. On part de la relation

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2(x+1)\,dx$$

(cf. [Can, Eq. (2.6)]) qui est une conséquence immédiate de [Can, Théorème 3]. Comme $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$, elle peut aussi s'écrire

$$2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1 = \int_0^1 \left(\psi^2(x) + 2\frac{\psi(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx \,.$$

Or, d'après [Coh, p. 145], on a

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) - \frac{2\gamma}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1 \,.$$

Par soustraction, on obtient

$$2\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1 - (2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1) = 2\int_0^1 \left((\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx \,.$$

Comme

$$(\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x} \,,$$

on en déduit l'identité

$$2\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1 = 2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\nu_{-1} \,,$$

qui, après division par 2, n'est autre que la relation (4). $\square$

Il résulte alors de (3) et (4) que la valeur de la constante en $s = 1$ est

$$C_1 = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)\,. \tag{5}$$

Remarque 2. Il résulte du Corollaire 1 que, contrairement au cas de la fonction ζ de Riemann, la constante au pôle $s = 1$ de ζ_H n'est pas égale à $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n}$. Numériquement, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = 0.5290529699\ldots$$

Le développement asymptotique à l'infini de $\sum_{n=1}^{N} \frac{H_n}{n}$ obtenu en écrivant

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{H_n}{n} = \frac{1}{2}(H_N)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\,,$$

permet de montrer que

$$C_1 = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{H_n}{n} - \frac{1}{2}\ln^2 N - \gamma \ln N\right) = 0.989055995\ldots\,.$$

1.2 Les constantes en $s = 0$ et $1 - 2k$

Les constantes de ζ_H aux pôles négatifs ont été calculés par Boyadzhiev et al. ([BGP]). On va retrouver ces résultats par une autre méthode. La formule (1) donne au voisinage de $s = -k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ le développement

$$\zeta_H(s) = (-1)^{k-1}\frac{\zeta(-k)}{s+k} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^k H_n - \nu_k + (-1)^{k-1}\zeta'(-k) + O(s+k)\,, \tag{6}$$

où on a posé (cf. [Cop])

$$\nu_k := \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+k} = \int_0^1 x^k\left(\psi(x+1) + \gamma\right)\,dx\,.$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2. a) Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}\zeta_H(s) &= -\frac{\zeta(0)}{s} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n - \nu_0 - \zeta'(0) + O(s)\\ &= \frac{1}{2s} + \left(\frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log(2\pi)\right) - \gamma + \frac{1}{2}\log(2\pi) + O(s)\,,\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\zeta_H(s) = \frac{1}{2s} + C_0 + O(s)\,,$$

avec

$$C_0 = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\,. \tag{7}$$

b) Au voisinage de -1, on a

$$\zeta_H(s) = \frac{\zeta(-1)}{s+1} + C_{-1} + O(s+1)\,,$$

avec

$$C_{-1} = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} nH_n - \nu_1 + \zeta'(-1)\,.$$

On a calculé (cf. [Can, p. 99])

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} nH_n = \frac{5}{12}\gamma - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \zeta'(-1) + \frac{7}{8}$$

et

$$\nu_1 = \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\log(2\pi) + 1\,.$$

Il en résulte que la valeur de la constante en $s = -1$ est

$$C_{-1} = -\frac{1}{12}\gamma - \frac{1}{8}\,.\text{[3]} \tag{8}$$

On peut généraliser les formules (7) et (8) comme suit.

Proposition 2. Au voisinage de $s = 1 - 2k$ avec $k \geq 1$, on a le développement

$$\zeta_H(s) = \frac{\zeta(1-2k)}{s+2k-1} + C_{1-2k} + O(s+2k-1)$$

avec

$$C_{1-2k} = -\frac{B_{2k}}{2k}\gamma + D_{2k-1}\,,$$

où pour $k = 1$,

$$D_1 = -\frac{1}{8}\,,$$

et pour $k \geq 2$,

$$D_{2k-1} = \frac{1}{2k}\left[H_{2k-1}B_{2k} + \sum_{j=0}^{2k-2}\binom{2k}{j}\frac{B_j B_{2k-j}}{2k-j}\right]\,. \tag{9}$$

3. [BGP, Eq. (23)] donne par erreur $C_{-1} = \frac{1}{12}\gamma - \frac{1}{8}$.

Démonstration. Au voisinage de $1-2k$ pour $k \geq 1$, on a par la formule (6)

$$\zeta_H(s) = \frac{\zeta(1-2k)}{s+2k-1} + D_{2k-1} - \gamma\frac{B_{2k}}{2k} + O(s+2k-1)\,.$$

avec

$$D_{2k-1} = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-1}H_n - \nu_{2k-1} + \zeta'(1-2k) + \gamma\frac{B_{2k}}{2k}\,.$$

On a $D_1 = -\frac{1}{8}$ (cf. Corollaire 2, b)), et pour $k \geq 2$, on déduit de [BGP, Eq. (22)] l'identité

$$D_{2k-1} = H_{2k-1}\frac{B_{2k}}{2k} + \sum_{j=0}^{2k-2}\binom{2k-1}{j}\frac{B_jB_{2k-j}}{(2k-j)^2}$$

qui conduit à l'expression (9). □

Exemple. En particulier, on calcule $D_3 = \frac{1}{288}$. La valeur de la constante en -3 est donc

$$C_{-3} = \frac{1}{120}\gamma + \frac{1}{288}\,.$$

Remarque 3. Pour $k \geq 0$, soit

$$D_{2k} := \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k}H_n - \nu_{2k} - \zeta'(-2k)\,.$$

On a $D_0 = \frac{1}{2}$ (cf. Corollaire 2, a)), et pour $k \geq 1$, les sommes $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k}H_n$ étant liées par la formule (6) au développement de ζ_H au voisinage de $s = -2k$ par

$$\zeta_H(s) = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k}H_n - \nu_{2k} - \zeta'(-2k) + O(s+2k)\,,$$

on en déduit que

$$\zeta_H(-2k) = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k}H_n - \nu_{2k} - \zeta'(-2k) = D_{2k}\,.$$

Il résulte alors de la formule de Matsuoka l'identité suivante :

$$D_{2k} = -\frac{B_{2k}}{4k} + \frac{B_{2k}}{2} = (2k-1)\frac{B_{2k}}{4k}\,. \tag{10}$$

En particulier, il résulte de (9) et (10) que les nombres D_k définis par

$$D_k := \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^kH_n - \nu_k + (-1)^{k-1}\zeta'(-k) + \gamma\frac{B_{k+1}}{k+1}$$

sont des rationnels pour tout entier $k \geq 0$, ce qui pouvait aussi se déduire de [CGP, Lemmes 1 et 2] .

2 La fonction ζ_{H^p}

Pour tout entier $p > 1$, on considère la suite $H^p = (H_n^p)$ des nombres harmoniques généralisés
$$H_n^p := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p}\,.$$
Nota Bene. Les nombres harmoniques généralisés sont traditionnellement notés $H_n^{(p)}$ (cf. [Can, CC, WL]). On adopte ici la notation plus légère H_n^p. Pour éviter les confusions, on prendra soin d'écrire $(H_n)^p$ la puissance p-ième de H_n.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a (cf. [Coh, p. 95])
$$H_n^p = \psi_p(n)$$
où ψ_p est la fonction analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(x) > 1$ définie par
$$\psi_p(x) = \zeta(p) + \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(x+1)\,.$$

Définition 3. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On appelle *fonction zêta harmonique d'ordre* p et on note ζ_{H^p} la fonction analytique définie dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ par
$$\zeta_{H^p}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^p}{n^s}\,.$$

On démontre, pour la fonction ζ_{H^p}, l'existence d'un résultat analogue au Théorème 1.

Théorème 2. *Pour* $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$*, la fonction* $\zeta_{H^p}(s)$ *peut s'écrire*
$$\zeta_{H^p}(s) = \frac{-\pi}{\sin(\pi s)}\frac{\Gamma(s+p-1)}{\Gamma(s)\Gamma(p)}\zeta(s+p-1) - \int_0^1 \frac{\psi_p(x)}{x^s}\,dx + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^p}{n^s}\,. \tag{11}$$

Démonstration. Comme dans le Théorème 1, on a, pour $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$, la relation
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n^p}{n^s} = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^p}{n^s} + \int_0^{+\infty} \frac{\psi_p(x)}{x^s}\,dx - \int_0^1 \frac{\psi_p(x)}{x^s}\,dx\,.$$
En dérivant $p-1$ fois le développement de $x \mapsto \psi(x+1)$, on obtient pour $x \in]0,1[$, le développement en série entière
$$\frac{\psi_p(x)}{x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(n+2)\cdots(n+p)}{(p-1)!}\zeta(n+p+1)x^n\,.$$

Le “Ramanujan master’s theorem” nous donne alors pour $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi_p(x)}{x^s}\,dx = \frac{-\pi}{\sin(\pi s)} \frac{s(s+1)\cdots(s+p-2)}{(p-1)!}\zeta(s+p-1)$$
$$= \frac{-\pi}{\sin(\pi s)} \frac{\Gamma(s+p-1)}{\Gamma(s)\Gamma(p)}\zeta(s+p-1).$$

□

La formule (11) fournit en outre le prolongement méromorphe de la fonction ζ_{H^p} dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) < 2$. Elle admet des pôles simples aux points

$$s = 1,\ 2-p,\ 1-p,\ -p,\ -2k-p \ \text{ avec } \ k = 1, 2, 3, \ldots$$

qui sont les pôles de la fonction

$$s \mapsto \frac{-\pi}{\sin(\pi s)} \frac{\Gamma(s+p-1)}{\Gamma(s)\Gamma(p)}\zeta(s+p-1)\,.$$

2.1 Le cas $p = 2$

Pour $1 < \mathrm{Re}(s) < 2$, on déduit du Théorème 2 la relation

$$\zeta_{H^2}(s) = \frac{-\pi}{\sin(\pi s)} s\,\zeta(s+1) - \int_0^1 \frac{\zeta(2) - \psi'(x+1)}{x^s}\,dx + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^2}{n^s} \tag{12}$$

La fonction ζ_{H^2} admet des pôles simples aux points

$$s = 1, 0, -1, -2, -4, -6, \ldots$$

qui sont les pôles de la fonction

$$s \mapsto \frac{-\pi}{\sin(\pi s)} s\,\zeta(s+1)\,.$$

On va entièrement déterminer les constantes de ζ_{H^2} en ses pôles.

Proposition 3. a) Au voisinage de $s = 1$, on a le développement

$$\zeta_{H^2}(s) = \frac{\zeta(2)}{s-1} + C_1^{(2)} + O(s-1)$$

avec

$$C_1^{(2)} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3)\,. \tag{13}$$

b) Au voisinage de $s=0$, on a le développement

$$\zeta_{H^2}(s) = -\frac{1}{s} + C_0^{(2)} + O(s)$$

avec

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{2}\zeta(2) - \gamma - 1\,. \tag{14}$$

c) Au voisinage de $s=-1$, on a le développement

$$\zeta_{H^2}(s) = \frac{1}{2(s+1)} + C_{-1}^{(2)} + O(s+1)$$

avec

$$C_{-1}^{(2)} = -\frac{1}{12}\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}\,. \tag{15}$$

Démonstration. a) En $s=1$, d'après (12), on a

$$C_1^{(2)} = \zeta(2) + \zeta'(2) - \int_0^1 \frac{\zeta(2) - \psi'(x+1)}{x}\,dx + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^2}{n}\,.$$

Or, on sait (cf. [CC, Eq. (3)]) que

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^2}{n} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \nu_{-2}$$

avec

$$\nu_{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n+2)}{n}\,,$$

ce qui permet d'écrire

$$\zeta_{H^2}(s) = \frac{\zeta(2)}{s-1} + \gamma\zeta(2) - \zeta(3) + \zeta(2) - 1 + \int_0^1 \frac{\psi'(x+1) - \zeta(2)}{x}\,dx - \nu_{-2}\,.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\psi'(x+1)-\zeta(2)}{x}\,dx$ se calcule par intégration par parties en posant

$$u = \psi(x+1) + \gamma - \zeta(2)x \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{x}.$$

Il vient alors

$$\int_0^1 \frac{\psi'(x+1) - \zeta(2)}{x}\,dx = 1 - \zeta(2) + \int_0^1 \frac{\psi(x+1) + \gamma - \zeta(2)x}{x^2}\,dx\,,$$

et aussi (par le Lemme 1) :

$$\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma-\zeta(2)x}{x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n+2)}{n} = \nu_{-2}\,.$$

On en déduit l'expression de la constante en 1 :

$$C_1^{(2)} = \gamma\zeta(2)-\zeta(3)\,.$$

b) En $s=0$, d'après (12), on a

$$C_0^{(2)} = -\gamma-\zeta(2)+1+\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^2\,.$$

Or, on sait que

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^2 = \frac{3}{2}\zeta(2)-2$$

(cf. [Can, p. 44]), on en déduit l'expression de la constante en 0 :

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{2}\zeta(2)-\gamma-1\,.$$

c) En $s=-1$, toujours d'après (12), on a

$$C_{-1}^{(2)} = \frac{1}{2}\log(2\pi)+\frac{1}{2}-\gamma-\frac{1}{2}\zeta(2)+\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} nH_n^2\,.$$

Par [Can, p. 82], on calcule la somme

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} nH_n^2 = \frac{5}{12}\zeta(2)-\frac{1}{2}\log(2\pi)+\frac{3}{2}\gamma-\frac{1}{4}\,.$$

On en déduit l'expression de la constante en -1 :

$$C_{-1}^{(2)} = -\frac{1}{12}\zeta(2)+\frac{1}{2}\gamma+\frac{1}{4}\,.$$

□

Pour les pôles en $s=-2,-4,-6,\ldots$, on montre le résultat suivant :

Proposition 4. Au voisinage de $s = -2k$ avec $k \geq 1$, on a le développement

$$\zeta_{H^2}(s) = -\frac{B_{2k}}{s+2k} + C_{-2k}^{(2)} + O(s+2k)$$

avec

$$C_{-2k}^{(2)} = -B_{2k}\gamma + D_{2k}^{(2)}\,, \tag{16}$$

où, pour $k = 1$,

$$D_2^{(2)} = -\frac{5}{36}\,,$$

et pour $k \geq 2$,

$$D_{2k}^{(2)} = B_{2k}H_{2k-1} + \sum_{j=0}^{2k-2} \binom{2k}{j} \frac{B_j B_{2k-j}}{2k-j} - \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} \frac{B_j B_{2k-j}}{j+1}\,. \tag{17}$$

La preuve de la Proposition 4 fait intervenir le Lemme suivant :

Lemme 3. Pour tout entier $k \geq 1$, on a la relation

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^k H_n^2 = k \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{k-1} H_n + \frac{1-B_{k+1}}{k+1}\zeta(2) - b_k \tag{18}$$

avec

$$b_k = 1 + \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{B_j B_{k-j}}{j+1}\,.$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n e^{-nz} &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n e^{-nz} - \int_1^{\infty} (\psi(x+1)+\gamma) e^{-xz}\,dx \\
&= -\frac{\log(1-e^{-z})}{1-e^{-z}} - \frac{e^{-z}}{z}\gamma - \int_1^{\infty} \psi(x+1) e^{-xz}\,dx
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^2 e^{-nz} &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n^2 e^{-nz} + \int_1^{\infty} (\psi'(x+1)-\zeta(2)) e^{-xz}\,dx \\
&= \frac{1}{1-e^{-z}}\mathrm{Li}_2(e^{-z}) - \frac{e^{-z}}{z}\zeta(2) + \int_1^{\infty} \psi'(x+1) e^{-xz}\,dx\,.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties la dernière intégrale, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^2 e^{-nz} = \frac{1}{1-e^{-z}}\mathrm{Li}_2(e^{-z}) - \frac{e^{-z}}{z}\zeta(2) - e^{-z}(1-\gamma) + z\int_1^{\infty} \psi(x+1) e^{-xz}\,dx\,.$$

L'élimination du terme intégral dans les deux formules nous donne

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^2 e^{-nz} = -z\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n e^{-nz} + \frac{1}{1-e^{-z}}\mathrm{Li}_2(e^{-z}) - z\frac{\log(1-e^{-z})}{1-e^{-z}} - \frac{e^{-z}}{z}\zeta(2) - e^{-z}\,. \tag{19}$$

Il suffit alors d'utiliser les développements suivants

$$\begin{aligned}-z\frac{\log(1-e^{-z})}{1-e^{-z}} &= \frac{-z}{1-e^{-z}}\log\frac{1-e^{-z}}{z} + \frac{-z}{1-e^{-z}}\log z\\ &= \frac{-z}{1-e^{-z}}\sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{1}{k}\frac{z^k}{k!} + \frac{-z}{1-e^{-z}}\log z\end{aligned}$$

et (cf. [CGP, Eq. (133)])

$$\frac{1}{1-e^{-z}}\mathrm{Li}_2(e^{-z}) = \frac{1}{1-e^{-z}}\left(\zeta(2) + z\log z - z + z\sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{1}{k(k+1)}\frac{z^k}{k!}\right)$$

pour en déduire que

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^2 e^{-nz} = -z\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n e^{-nz} + (\frac{1}{1-e^{-z}} - \frac{e^{-z}}{z})\zeta(2) + \frac{-z}{1-e^{-z}}&\\ + \frac{-z}{1-e^{-z}}\sum_{k=1}^{\infty} B_k\frac{1}{k+1}\frac{z^k}{k!} - e^{-z}\,.&\end{aligned}$$

En développant ces termes en puissances de z et en identifiant, on obtient pour $k \geq 1$ la relation

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k H_n^2 = k\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{k-1}H_n + \zeta(2)(\frac{1-B_{k+1}}{k+1}) - B_k - 1 - \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{j+1}B_jB_{k-j}\,,$$

c'est à dire

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^k H_n^2 = k\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{k-1}H_n + a_k\zeta(2) - b_k$$

avec

$$a_k = \frac{1-B_{k+1}}{k+1}$$

et

$$b_k = 1 + \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^j}{j+1}B_jB_{k-j}$$

qui n'est autre que la formule (18). □

On est à présent en mesure de démontrer la Proposition 4.

Démonstration. En $s=-2k$, d'après (12), l'expression de la constante est

$$C_{-2k}^{(2)} = \frac{B_{2k}}{2k} + 2k\zeta'(1-2k) - \frac{1}{2k+1}\zeta(2) + \int_0^1 x^{2k}\psi'(x+1)\,dx + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k}H_n^2\,.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^1 x^{2k}\psi'(x+1)\,dx = 1-\gamma-2k\int_0^1 x^{2k-1}\psi(x+1)\,dx\,.$$

Or,

$$\int_0^1 x^{2k-1}\psi(x+1)\,dx = \nu_{2k-1} - \frac{1}{2k}\,\gamma$$

et ν_{2k-1} peut s'écrire

$$\nu_{2k-1} = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-1}H_n + \zeta'(1-2k) + \frac{B_{2k}}{2k}\,\gamma - D_{2k-1}\,,$$

avec $D_1 = -\frac{1}{8}$, et D_{2k-1} donné pour $k\geq 2$ par la formule (9) . Il en résulte que

$$\int_0^1 x^{2k}\psi'(x+1)\,dx = 1-2k\zeta'(1-2k) - B_{2k}\gamma - 2k\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-1}H_n + 2kD_{2k-1}\,.$$

Une simplification importante découle alors du Lemme précédent. En effet, par (18), on a la relation

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k}H_n^2 = 2k\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-1}H_n + \frac{1}{2k+1}\zeta(2) - b_{2k}$$

où b_{2k} est le rationnel

$$b_{2k} = 1 + \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}\frac{B_jB_{2k-j}}{j+1}\,.$$

On en déduit que

$$C_{-2k}^{(2)} = -B_{2k}\gamma + D_{2k}^{(2)}$$

avec

$$D_{2k}^{(2)} := \frac{B_{2k}}{2k} + 2kD_{2k-1} - b_{2k} + 1\,.$$

Ce qui donne

$$D_2^{(2)} = -\frac{5}{36}\,,$$

et pour $k \geq 2$,

$$D_{2k}^{(2)} = \frac{B_{2k}}{2k} + B_{2k}H_{2k-1} + \sum_{j=0}^{2k-2} \binom{2k}{j} \frac{B_j B_{2k-j}}{2k-j} - \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} \frac{B_j B_{2k-j}}{j+1} \,.$$

□

Exemple. La valeur de la constante en -4 est

$$C_{-4}^{(2)} = \frac{1}{30}\gamma - \frac{1}{600} \,.$$

La formule (12) permet en outre de calculer les valeurs spéciales de la fonction ζ_{H^2} aux points $s = -3, -5, -7, \ldots$. Plus précisément, on montre le résultat suivant :

Proposition 5. Pour tout entier $k \geq 2$

$$\zeta_{H^2}(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}\zeta(2) - \frac{(2k-1)(2k-3)B_{2k-2}}{4(k-1)} - \sum_{j=1}^{2k-2} (-1)^j \binom{2k-1}{j} \frac{B_j B_{2k-1-j}}{j+1} \,. \tag{20}$$

Démonstration. On a par (12),

$$\zeta_{H^2}(1-2k) = (1-2k)\zeta'(2-2k) - \frac{1}{2k}\zeta(2) + \int_0^1 x^{2k-1}\psi'(x+1)\,dx + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-1}H_n^2 \,.$$

En procédant comme dans la preuve de la proposition précédente, on obtient

$$\zeta_{H^2}(1-2k) = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-1}H_n^2 - (2k-1)\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-2}H_n - \frac{1}{2k}\zeta(2) + 1 + (2k-1)D_{2k-2} \,,$$

avec D_{2k} donné par la formule (10). La relation (18) entre les sommes

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-1}H_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2k-2}H_n$$

conduit alors à la formule (20). □

Exemple. La valeur de ζ_{H^2} au point $s = -3$ est

$$\zeta_{H^2}(-3) = \frac{1}{120}\zeta(2) + \frac{1}{12} \,.$$

2.2 La constante en $s = 1$

La proposition suivante prolonge l'identité (13) démontrée dans le cas $p = 2$.

Proposition 6. Pour tout entier $p \geq 2$, on a dans un voisinage de $s = 1$, le développement

$$\zeta_{H^p}(s) = \frac{\zeta(p)}{s-1} + C_1^{(p)} + O(s-1)\,, \tag{21}$$

avec

$$C_1^{(p)} = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \zeta_H(p)\,. \tag{22}$$

Démonstration. Pour $p = 2$, l'équation (22) n'est autre que la formule (13) du fait que $\zeta_H(2) = 2\zeta(3)$. Dans la suite, on suppose $p \geq 3$. D'après le Théorème 2, on a dans un voisinage de $s = 1$,

$$\zeta_{H^p}(s) = \frac{\zeta(p)}{s-1} + C_1^{(p)} + O(s-1)\,,$$

où

$$C_1^{(p)} = H_{p-1}\,\zeta(p) + \zeta'(p) + (-1)^p I_p + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^p}{n}\,, \tag{23}$$

avec

$$I_p := \frac{1}{(p-1)!}\int_0^1 \frac{\partial^{p-1}\psi(x+1) - (-1)^p(p-1)!\,\zeta(p)}{x}\,dx\,.$$

On intègre $p-1$ fois par parties ce qui conduit à la relation

$$\begin{aligned}(-1)^p I_p = (-1)^p\nu_{-p} - H_{p-1}\zeta(p)&\\ - \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\zeta(p-j)(p-j-1)!\sum_{k=1}^{p-j-1}\frac{(k+j-1)!}{k!}&\\ + \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)!\,,&\end{aligned}$$

avec

$$\nu_{-p} = \int_0^1 \frac{\psi(x+1) + \gamma - \sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{j-1}\zeta(j+1)x^j}{x^p}\,dx = (-1)^p\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n+p)}{n}$$

par le Lemme 1. Pour simplifier la relation précédente, on se sert des identités suivantes :

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)! = \frac{1}{p-1}\sum_{k=0}^{p-2}\frac{(-1)^k}{\binom{p-2}{k}} = \frac{1+(-1)^p}{p}\,,$$

et

$$\sum_{k=1}^{p-j-1} \frac{(k+j-1)!}{k!} = (j-1)! \sum_{k=1}^{p-j-1} \binom{k+j-1}{j-1} = (j-1)! \left(\binom{p-1}{j} - 1 \right) .$$

Ce qui permet d'écrire

$$(-1)^p I_p = (-1)^p \nu_{-p} - H_{p-1}\zeta(p) + \sigma_p \tag{24}$$

avec

$$\sigma_p = \frac{1+(-1)^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2} (-1)^j \zeta(p-j) \left[\frac{(p-j-1)!(j-1)!}{(p-1)!} - \frac{1}{j} \right] .$$

D'autre part, d'après [CC, Eq. (9)], on a

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^p}{n} = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \zeta_H(p) - \sigma_p - \zeta'(p) - (-1)^p \nu_{-p} \, . \tag{25}$$

En remplaçant les seconds membres de (24) et (25) dans (23), on obtient alors la formule (22). $\square$

Exemple. Les constantes en $s=1$ des fonctions ζ_{H^3} et ζ_{H^4} sont respectivement

$$C_1^{(3)} = \gamma\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(4)$$

et

$$C_1^{(4)} = \gamma\zeta(4) - 2\zeta(5) + \zeta(3)\zeta(2) \, .$$

Remarque 4. En écrivant (par sommation par parties)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{H_n^p}{n} = H_N H_N^p - \sum_{n=1}^{N} \frac{H_n}{n^p} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{p+1}} \, ,$$

le développement asymptotique à l'infini de $\sum_{n=1}^{N} \frac{H_n^p}{n}$ permet de montrer que

$$C_1^{(p)} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{H_n^p}{n} - \zeta(p) \ln N \right) .$$

Remarque 5. La formule (22) s'étend au cas $p=1$ à condition de remplacer $\zeta(1)$ par γ (la constante de ζ en $s=1$) et $\zeta_H(1)$ par C_1 (la constante de ζ_H en $s=1$). Ceci conduit à l'équation

$$C_1 = \gamma^2 + \zeta(2) - C_1$$

qui permet de retrouver la formule (5) .

2.3 Une méthode pour calculer les constantes aux autres pôles de ζ_{H^p}

Pour $p \geq 3$, on a vu que les pôles de ζ_{H^p} différents de 1 sont situés aux points $s = m - p$ avec
$$m = 2,\ 1,\ 0,\ -2,\ -4,\ -6, \dots$$
Au voisinage de $s = m - p$, on a le développement de Laurent,

$$\zeta_{H^p}(s) = \frac{A_m}{s+p-m} + B_m - \int_0^1 \psi_p(x) x^{p-m}\, dx + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{p-m} H_n^p + O(s+p-m)\,,$$

où A_m et B_m sont les constantes définies par le développement

$$\frac{-\pi}{\sin(\pi s)} \frac{\Gamma(s+p-1)}{\Gamma(s)\Gamma(p)} \zeta(s+p-1) = \frac{A_m}{s+p-m} + B_m + O(s+p-m)\,.$$

On peut calculer les sommes $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{p-m} H_n^p$ par la même méthode qui a conduit à la formule (19) (voir la démonstration du Lemme 3). La généralisation de la formule (19) est la suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^p e^{-nz} &= (-1)^{p-1}\frac{1}{(p-1)!} z^{p-1} \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n e^{-nz} + \frac{1}{1-e^{-z}} \mathrm{Li}_p(e^{-z}) \\ &\quad + (-1)^{p-1}\frac{1}{(p-1)!} z^{p-1} \Big(\frac{\log(1-e^{-z})}{1-e^{-z}}\Big) \\ &\quad + (-1)^{p-1}\frac{1}{(p-1)!} e^{-z}\Big(z^{p-2} + \sum_{k=2}^{p-1} z^{k-2}(-1)^{p-k+1}(p-k)!\zeta(p-k+1)\Big) \\ &\quad - \frac{e^{-z}}{z}\zeta(p) + (-1)^{p-1}\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=2}^{p-1} z^{k-2}(-1)^{p-k}(p-k)!\,.\end{aligned}$$

Par exemple, pour $p = 3$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n^3 e^{-nz} &= \frac{1}{2} z^2 \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n e^{-nz} + \frac{1}{1-e^{-z}} \mathrm{Li}_3(e^{-z}) + \frac{1}{2} z^2 \Big(\frac{\log(1-e^{-z})}{1-e^{-z}}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-z}(z+\zeta(2)) - \frac{e^{-z}}{z}\zeta(3) - \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Ceci permet, comme dans le cas $p = 2$, d'exprimer les sommes $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^k H_n^p$ en fonction des sommes $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^k H_n$. On peut alors déterminer les constantes C_{m-p} par la même méthode que dans la section 2.1.

Références

[AMS] T. Amdeberhan et al., Ramanujan's Master Theorem, *Ramanujan J.* **29** (2012), 103–120

[AV] T. M. Apostol, T. H. Vu, Dirichlet series related to the Riemann zeta function, *J. Number Theory* **19** (1984), 85-102.

[BGP] K. Boyadzhiev, H. Gadiyar, R. Padma, The values of an Euler sum at the negative integers and a relation to a certain convolution of Bernoulli numbers, *Bull. Korean Math. Soc.* **45** (2008), 277–283.

[Can] B. Candelpergher, Ramanujan Summation of Divergent Series, Lecture Notes in Math. 2185, Springer, 2017.

[CGP] B. Candelpergher, H. Gadiyar, R. Padma, Ramanujan summation and the exponential generating function $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\zeta'(-k)$, *Ramanujan J.* **21** (2010), 99–122.

[Coh] H. Cohen, *Number Theory, Volume II : Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Math., vol. 240, Springer, 2007.

[Cop] M-A. Coppo, A note on some alternating series involving zeta and multiple zeta values, *J. Math. Anal. App.* **475** (2019), 1831–1841.

[CC] M-A. Coppo, B. Candelpergher, Sommation de Ramanujan des sommes d'Euler, 2020, hal-02352474v3.

[M] Y. Matsuoka, On the values of a certain Dirichlet series at rational integers, Tokyo J. Math. **5** (1982), 399–403.

[WL] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, *J. Number Theory* **185** (2018), 160–193.