Nouvelles relations de réciprocité entre sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo, Bernard Candelpergher

Nouvelles relations de réciprocité entre sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo et Bernard Candelpergher
Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR 7351), Nice, France

Abstract. In this study, we apply the Ramanujan summation method to a certain class of Euler sums. This enables us to provide new reflection formulas that extend the well-known relation of symmetry between reciprocal linear Euler sums.

Mathematics Subject Classification (2020): 11M06, 11M32, 40G99.

Keywords: Euler sums, harmonic numbers, digamma function, zeta values, Ramanujan summation of series, Cauchy numbers of the first kind.

Introduction

L'étude des sommes d'Euler a une assez longue histoire qui remonte au milieu du 18ème siècle. En réponse à une lettre de Goldbach datée de décembre 1742, Euler a été amené à considérer, pour des entiers positifs p et q avec $q \geq 2$, les séries infinies

$$\mathcal{S}_{p,q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q} ,$$

où les $H_n^{(p)}$ sont les nombres harmoniques généralisés qui, pour $p = 1$, se réduisent aux classiques nombres harmoniques $H_n = H_n^{(1)}$. L'importance des nombres harmoniques provient du fait qu'ils apparaissent (parfois de manière assez inattendue) dans différentes branches de la théorie des nombres et de la combinatoire. De nos jours, les sommes $\mathcal{S}_{p,q}$ sont appelées *sommes d'Euler lineaires* (cf. [11]). Euler a découvert que, pour tous les couples (p, q) vérifiant $p = 1$, ou $p = q$, ou $p+q$ impair,

E-mail address: coppo@unice.fr (M-A. Coppo).

ces sommes pouvaient s'exprimer comme des combinaisons de valeurs de zêta (i.e. les valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ aux entiers positifs), un résultat remarquable qui sera retrouvé et complété plus tard par Nielsen[1].

Parmi les belles formules déjà connues d'Euler[2], on retiendra notamment :

– La relation de symétrie (cf. [9, 11]) :

$$\mathcal{S}_{p,q} + \mathcal{S}_{q,p} = \zeta(p)\zeta(q) + \zeta(p+q)$$

qui permet d'exprimer $\mathcal{S}_{q,p}$ en fonction de $\mathcal{S}_{p,q}$ (et réciproquement).

– La formule d'Euler (cf. [9, 11]) :

$$2\mathcal{S}_{1,p} = (p+2)\zeta(p+1) - \sum_{j=1}^{p-2} \zeta(p-j)\zeta(j+1)$$

qui sera plusieurs fois redécouverte au cours du 20ème siècle (voir [9, Remarque 3.1] pour des précisions historiques).

Le procédé de sommation de Ramanujan apparaît dans le chapitre VI de son second *Notebook*. Desservie par les ambiguités (observées par Hardy[3]) dans la définition de la "constante d'une série" qui rendaient son utilisation malaisée, la méthode de Ramanujan, basée sur la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin, était quelque peu tombée dans l'oubli. Elle a connu un renouveau d'intérêt à la fin du 20ème siècle lorsqu'une définition claire et rigoureuse du procédé a été donnée en même temps que le lien avec la sommation usuelle était complètement éclairci. On trouvera dans [2] une synthèse magistrale des définitions, principales propriétés, et domaine d'application de la sommation de Ramanujan.

Le procédé de sommation de Ramanujan s'applique naturellement aux sommes d'Euler et permet de traiter simultanément le cas convergent et le cas divergent. En particulier, on calcule les sommes (au sens de Ramanujan) correspondant respectivement à $\mathcal{S}_{1,p}$ (cas convergent) et $\mathcal{S}_{p,1}$ (cas divergent) ce qui permet de prolonger la classique relation de symétrie entre sommes d'Euler réciproques énoncée plus haut (voir Propositions 1 et 2 et Théorème 1).

1 Sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

On rappelle que les nombres harmoniques généralisés sont définis par

$$H_0^{(r)} = 0 \quad \text{et} \quad H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \quad \text{pour } n, r = 1, 2, \ldots.$$

1. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunction, Teubner, Leipzig, 1906.
2. Ces formules sont données (sans démonstration) dans son célèbre article de 1776 *Meditationes circa singulare serierum genus*, E477.
3. G. H. Hardy, Divergent Series, Clarendon press, Oxford, 1949, Chapitre XIII.

Pour $r = 1$, ils se réduisent aux classiques nombres harmoniques $H_n = H_n^{(1)}$. On a les expressions suivantes (cf. [5, p. 95]) :

$$H_n = \psi(n+1) + \gamma\,,$$

où ψ désigne la fonction digamma ($= \Gamma'/\Gamma$) et γ la constante d'Euler, et pour $p \geq 2$,

$$H_n^{(p)} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1) + \zeta(p)\,.$$

Définition 1. Pour tout entier $p \geq 1$, on définit la fonction et $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(p,s)$ comme étant le prolongement analytique de la fonction définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(p)}\, n^{-s} - \int_1^{+\infty} \psi_p(x)\, x^{-s}\, dx\,,$$

avec $\psi_1(x) = \psi(x+1) + \gamma$, et pour $p \geq 2$,

$$\psi_p(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(x+1) + \zeta(p)\,.$$

D'après [2, Théorème 9], la fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(p,s)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$ tout entier. Les valeurs $\zeta^{\mathcal{R}}(p,q)$ sur les entiers s'interprètent alors comme la somme au sens de la sommation de Ramanujan de la série $\sum_{n\geq 1} H_n^{(p)}\, n^{-q}$.

La fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(1,s)$ est reliée à la fonction zêta harmonique ζ_H (cf. [4]) définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, n^{-s}\,,$$

au travers de la relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,s) = \zeta_H(s) - \int_1^{\infty} x^{-s}\left(\psi(x+1) + \gamma\right)\, dx \qquad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

Comme

$$\zeta_H(p) = \mathcal{S}_{1,p} \quad \text{pour } p = 2, 3, \ldots,$$

on en déduit la relation :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \mathcal{S}_{1,p} - \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1) + \gamma}{x^p}\, dx \qquad (p \geq 2)\,. \tag{1}$$

2 Calcul de $\zeta^{\mathcal{R}}(1,p)$

Pour calculer la somme $\zeta^{\mathcal{R}}(1,p)$, on commence par énoncer le lemme suivant :

Lemme 1. Pour tout entier $p \geq 1$, on considère les nombres τ_p définis par la série alternée semi-convergente

$$\tau_p = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+p} \frac{\zeta(k+p)}{k}\,. \tag{2}$$

a) Pour $p \geq 2$, on a la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = -\zeta'(p) - (-1)^p\, \tau_p\,. \tag{3}$$

b) Pour $p \geq 3$, on a la relation

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j} \zeta(p-j) - (-1)^p \zeta'(p) - \tau_p \tag{4}$$

qui, pour $p = 2$, se réduit à

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2}\, dx = -\zeta'(2) - \tau_2\,.$$

Démonstration. a) Pour $p \geq 2$, on peut décomposer la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n+1)}{n^p}$ comme suit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\,.$$

En développant $\ln(1+1/n)$ en série entière, on obtient alors l'expression :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k\right] = (-1)^{p-1}\, \tau_p\,,$$

d'où il résulte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = -\zeta'(p) - (-1)^p\, \tau_p\,.$$

b) Pour $p \geq 3$, le développement de Taylor du logarithme s'écrit

$$\ln(x+1) = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^k + (-1)^p x^{p-1} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{p-1}(t+x)}\, dt\,,$$

ce qui donne, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n^p} = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \frac{1}{n^{p-j}} + (-1)^p \int_1^\infty \frac{1}{t^{p-1} n(t+n)}\, dt\,.$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(n+1)}{n^p} = (-1)^p \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \zeta(p-j)\,.$$

La formule (4) se déduit alors de (3). Pour $p = 2$, cette formule se réduit simplement à

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(n+1)}{n^2} = -\zeta'(2) - \tau_2\,. \tag{5}$$

□

Remarque 1. Les nombres τ_p (pour $p = 1, 2, \ldots$) ont été étudiés de manière approfondie dans [7] et apparaissent aussi dans [4].

Proposition 1. Pour tout entier $p \geq 3$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \mathcal{S}_{1,p} - \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j} \zeta(p-j) + (-1)^p \zeta'(p) + \tau_p\,, \tag{6}$$

où τ_p est la somme de la série alternée définie par la formule (2). Il en résulte la formule

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) = (p+1)\zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \zeta(2p-j)\zeta(j+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j} \zeta(2p-j) + \zeta'(2p) + \tau_{2p}\,, \tag{7}$$

qui, pour $p = 1$, se réduit à

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \tau_2\,.$$

Démonstration. Par (1), on a la relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \mathcal{S}_{1,p} - \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx\,,$$

et, par (4), on a aussi

$$(-1)^p \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx = -\zeta'(p) - (-1)^p \tau_p + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^j}{j} \zeta(p-j)\,.$$

La formule (6) en résulte immédiatement. On en déduit l'identité (7) en exprimant $S_{1,2p}$ à l'aide de la formule d'Euler

$$\mathcal{S}_{1,2p} = (p+1)\zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \zeta(2p-j)\zeta(j+1)\,. \tag{8}$$

$\square$

Exemple 1.

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) &= 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \tau_2\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,4) &= 3\zeta(5) - \zeta(3)\zeta(2) + \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2) + \zeta'(4) + \tau_4\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,6) &= 4\zeta(7) - \zeta(3)\zeta(4) - \zeta(2)\zeta(5) + \zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(4) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2)\\
&\quad + \zeta'(6) + \tau_6\,.
\end{aligned}$$

Remarque 2. On notera l'analogie formelle entre la formule (7) et la formule "duale"donnée dans [6, Eq. (8)] :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-2p) = \frac{1-2p}{2}\zeta(1-2p) + \zeta'(-2p) + \nu_{2p}$$

avec

$$\nu_p = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \, \frac{\zeta(k)}{k+p} \qquad (p \geq 1)\,.$$

En particulier, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-2) = \zeta'(-2) + \nu_2 + \frac{1}{24}\,,$$

et

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-4) = \zeta'(-4) + \nu_4 - \frac{1}{80}\,.$$

3 Calcul de $\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)$

Proposition 2. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \mathcal{S}_{1,p} - \sigma_p - \zeta'(p) - (-1)^p\tau_p\,, \tag{9}$$

où σ_p est défini par $\sigma_2 = 1$, et pour $p \geq 3$,

$$\sigma_p = \frac{1+(-1)^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2} (-1)^j \zeta(p-j) \left[\frac{(j-1)!(p-1-j)!}{(p-1)!} - \frac{1}{j}\right]\,. \tag{10}$$

Il en résulte la formule

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) = \gamma\zeta(2p) - p\,\zeta(2p+1) + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta(2p-j)\zeta(j+1) - \sigma_{2p} - \zeta'(2p) - \tau_{2p}\,, \quad (11)$$

qui, pour $p = 1$, se réduit à

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \tau_2\,.$$

Démonstration. En sommant (au sens de Ramanujan) les égalités suivantes :

$$\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{1}{n}\zeta(p) = -\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1)\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{\zeta(p)}{n}\right) &= -\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p}\\
&= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n}\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1)\\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\partial^{p-1}\psi(x+1)\frac{1}{x}\,dx\,,
\end{aligned}$$

le symbole $\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}$ désignant la somme de la série au sens de la sommation de Ramanujan (cf. [2]). Comme

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^p} - \zeta(p+1)\,,$$

ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{\zeta(p)}{n}\right) = \zeta(p+1) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\partial^{p-1}\psi(x+1)\frac{1}{x}\,dx\,.$$

On a donc

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{H_n^{(p)}}{n} = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\partial^{p-1}\psi(x+1)\frac{1}{x}\,dx\,,$$

c'est à dire :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - S_{1,p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx\,. \quad (12)$$

On calcule l'intégrale figurant dans le second membre de (12) en intégrant $p-1$ fois par parties. Pour $p=2$, on obtient simplement

$$\int_1^{+\infty} \frac{\partial\psi(x+1)}{x}\,dx = \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2}\,dx \;-1\,,$$

ce qui, par (5), permet d'obtenir (9). Dans la suite, on suppose $p \geq 3$. De l'identité

$$\partial^{p-k}\psi(2) = (-1)^{p-k}(p-k)! + (-1)^{p-k+1}(p-k)!\zeta(p-k+1) \qquad (p-k \geq 1)$$

(cf. [5, Proposition 9.6.41]) découle la relation

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty} \frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx = (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1) - \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)!\,.$$

Le dernier terme peut se simplifier par la formule :

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)! = \frac{1}{p-1}\sum_{k=0}^{p-2}\frac{(-1)^k}{\binom{p-2}{k}} = \frac{1+(-1)^p}{p}$$

(cf. [10, Eq. (14)]). Après réindexation des indices de sommation, on a aussi

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1) = -\sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j)\,.$$

Enfin, par (4), on a

$$(-1)^p\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx = \sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j) - \zeta'(p) - (-1)^p\tau_p\,.$$

Finalement, la formule (12) peut se réécrire

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \mathcal{S}_{1,p} - \zeta'(p) - (-1)^p\tau_p - \sigma_p\,,$$

avec

$$\sigma_p = \frac{1+(-1)^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j) - \sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)$$

ce qui établit la formule (9). La formule (11) s'en déduit aussitôt par la formule d'Euler (8). $\square$

Exemple 2. Les premières valeurs de σ_p sont

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= 1\,,\\
\sigma_3 &= \frac{1}{2}\zeta(2)\,,\\
\sigma_4 &= \frac{2}{3}\zeta(3) - \frac{1}{3}\zeta(2) + \frac{1}{2}\,,\\
\sigma_5 &= \frac{3}{4}\zeta(4) - \frac{5}{12}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(2)\,,\\
\sigma_6 &= \frac{4}{5}\zeta(5) - \frac{9}{20}\zeta(4) + \frac{9}{10}\zeta(3) - \frac{1}{5}\zeta(2) + \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(2,1) &= \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \tau_2\\
\zeta^{\mathcal{R}}(3,1) &= \gamma\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(2) - \zeta'(3) + \tau_3\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(4,1) &= \gamma\zeta(4) - 2\zeta(5) + \zeta(3)\zeta(2) - \frac{2}{3}\zeta(3) + \frac{1}{3}\zeta(2) - \frac{1}{2} - \zeta'(4) - \tau_4\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(5,1) &= \gamma\zeta(5) - \frac{3}{4}\zeta(6) - \frac{3}{4}\zeta(4) + \frac{1}{2}(\zeta(3))^2 + \frac{5}{12}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2) - \zeta'(5) + \tau_5\,.
\end{aligned}$$

Remarque 3. On peut déduire de [3, Eq. (27)] une expression différente de σ_p. Considérons

$$Z(i,j) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i\,(n+1)^j} \qquad (i,j \geq 1)\,.$$

En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{n^i\,(n+1)^j}$, les sommes $Z(i,j)$ s'expriment comme des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de valeurs de zêta et d'entiers relatifs. La formule [3, Eq. (27)] se traduit alors par l'identité

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}\, Z(p-k,k)\,.$$

4 Une formule pour $\zeta^{\mathcal{R}}(1,1)$

La formule suivante (cf. [2, Eq. (3.23)]), dont on donne ci-dessous une nouvelle preuve, permet de prolonger la formule (9) pour $p = 1$. On a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \tau_1\,, \tag{13}$$

où γ_1 est la première constante de Stieltjes et

$$\tau_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\zeta(k+1)}{k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx\,.$$

Démonstration. La relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2(x+1)\,dx$$

(cf. [2, Eq. (2.6) p. 40]) est une conséquence directe de [2, Théorème 3]. Comme $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$, elle peut aussi s'écrire

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) + 2\frac{\psi(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) - \gamma^2 - \zeta(2) + 1\,.$$

Or, d'après [5, p. 145], on a

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) - \frac{2\gamma}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1\,.$$

Par soustraction, on obtient

$$2\int_0^1 \left((\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \zeta^{\mathcal{R}}(1,1) - \gamma^2 - \zeta(2) + 1 - (2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1)\,.$$

Comme

$$(\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,,$$

on en déduit l'identité

$$2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1\,.$$

Le développement de ψ en série entière :

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)x^{n-1} \qquad (|x|<1)$$

permet d'identifier l'intégrale du membre de gauche avec la série τ_1 :

$$\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\zeta(n+1)}{n} = \tau_1.$$

On obtient alors la formule (13) après division par 2. □

Remarque 4 (autre expression de $\zeta^{\mathcal{R}}(1,1)$)**.** On reconnaît en $\zeta^{\mathcal{R}}(1,1)$ la constante $\kappa_1 = 0.5290529\ldots$ qui a été étudiée en détail dans [1]. On a en particulier l'expression intégrale suivante :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \int_0^1 \frac{\gamma + \ln x - \mathrm{li}(1-x)}{x}\,dx$$

(cf. [1, Eq. 34]) où $\mathrm{li}(x)$ désigne le logarithme intégral.

5 Formules de réciprocité

5.1 Le cas pair

Théorème 1 (première partie)**.** *Pour tout entier $p \geq 2$, on a*

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} (-1)^j A_j \, \zeta(2p-j) - \frac{1}{p} \tag{14}$$

avec

$$A_j = \frac{(j-1)!(2p-1-j)!}{(2p-1)!}\,.$$

Démonstration. En effectuant la somme des identités (7) et (11) , on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j} \zeta(2p-j) - \sigma_{2p}\,.$$

L'identité (14) s'en déduit aussitôt en remplaçant σ_{2p} par son expression donnée par (10). $\square$

Exemple 3. Pour les premières valeurs, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) + \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) &= \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,4) + \zeta^{\mathcal{R}}(4,1) &= \gamma\zeta(4) + \zeta(5) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{6}\zeta(2) - \frac{1}{2}\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,6) + \zeta^{\mathcal{R}}(6,1) &= \gamma\zeta(6) + \zeta(7) + \frac{1}{5}\zeta(5) - \frac{1}{20}\zeta(4) + \frac{1}{30}\zeta(3) - \frac{1}{20}\zeta(2) - \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

5.2 Le cas impair

Théorème 1 (deuxième partie)**.** *Pour tout entier $p \geq 2$, on a*

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}&(1,2p-1) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p-1,1)\\
&= \gamma\zeta(2p-1) + \zeta(2p) - \sum_{j=1}^{2p-3} (-1)^j C_j \, \zeta(2p-1-j)\\
&\qquad - 2\zeta'(2p-1) + 2\tau_{2p-1}
\end{aligned} \tag{15}$$

avec

$$C_j = \frac{(j-1)!(2p-2-j)!}{(2p-2)!} - \frac{2}{j}\,.$$

Démonstration. En effectuant la somme des identités (6) et (9), on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)+\zeta^{\mathcal{R}}(1,p)=\gamma\zeta(p)+\zeta(p+1)-\sigma_p-(-1)^p\sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)$$
$$+\,(1-(-1)^p)\tau_p+((-1)^p-1)\zeta'(p)\,.$$

Il en résulte la formule suivante

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p-1,1)+\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p-1)=\zeta(2p)+\gamma\zeta(2p-1)-\sigma_{2p-1}+\sum_{j=1}^{2p-3}\frac{(-1)^j}{j}\zeta(2p-1-j)$$
$$-\,2\zeta'(2p-1)+2\tau_{2p-1}$$

d'où se déduit l'identité (15) en exprimant σ_{2p-1} par (10). On remarquera qu'à la différence du cas pair, le terme constant de σ_{2p-1} est nul. □

Exemple 4. Pour les premières valeurs, on obtient les relations suivantes :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,3)+\zeta^{\mathcal{R}}(3,1)=\gamma\zeta(3)+\zeta(4)-\frac{3}{2}\zeta(2)-2\zeta'(3)+2\tau_3\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,5)+\zeta^{\mathcal{R}}(5,1)=\gamma\zeta(5)+\zeta(6)-\frac{7}{4}\zeta(4)+\frac{11}{12}\zeta(3)-\frac{7}{12}\zeta(2)-2\zeta'(5)+2\tau_5\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,7)+\zeta^{\mathcal{R}}(7,1)=\gamma\zeta(7)+\zeta(8)-\frac{11}{6}\zeta(6)+\frac{29}{30}\zeta(5)-\frac{17}{30}\zeta(4)+\frac{2}{5}\zeta(3)-\frac{11}{30}\zeta(2)$$
$$-\,2\zeta'(7)+2\tau_7\,.$$

6 Sommes harmoniques faisant intervenir les nombres de Cauchy

On considère la suite des nombres rationnels positifs $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ appelés *nombres de Cauchy non-alternés*[4] (cf. [3]) qu'on peut définir par la fonction génératrice

$$\frac{x}{\ln(1-x)}+1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\,x^n\quad(|x|<1)\,,$$

d'où se déduit facilement la relation de récurrence

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_k}{k!\,(n-k)}=\frac{1}{n}\quad(n\geq 2)\,.$$

4. Les nombres de Cauchy classiques (cf. [8]), notés c_n, sont définis par $c_0=1$, et $c_n=(-1)^{n-1}\lambda_n$ pour $n\geq 1$.

Cette relation permet de calculer récursivement les premiers termes de la suite :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,,\ \lambda_2 = \frac{1}{6}\,,\ \lambda_3 = \frac{1}{4}\,,\ \lambda_4 = \frac{19}{30}\,,\ \lambda_5 = \frac{9}{4}\,,\ \lambda_6 = \frac{863}{84}\,,\cdots \ \text{etc.}$$

On introduit également les sommes harmoniques $\mathcal{V}_{p,q}$ et $\mathcal{W}_{p,q}$ définies respectivement pour $p, q \geq 1$ par

$$\mathcal{V}_{p,q} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n^{(p)}}{n^q} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{p,q} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{(H_n)^p}{n^q}\,.$$

On rappelle le résultat suivant qui est bien connu (cf. [3, Example 8]) :

$$\mathcal{V}_{1,1} = \mathcal{W}_{1,1} = \zeta(2) - 1\,.$$

Proposition 3. Pour les premières valeurs, on a les formules suivantes :

$$\mathcal{V}_{2,1} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \tau_2\,, \tag{16}$$

$$\mathcal{V}_{1,2} = \mathcal{W}_{1,2} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \tau_2\,, \tag{17}$$

$$\mathcal{W}_{2,1} = -\zeta'(2) - \tau_2 - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^2} - 1\,. \tag{18}$$

Démonstration. On déduit de [2, Théorème 18] les identités

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \mathcal{V}_{2,1} \quad \text{et} \quad \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n}{n^2} = \mathcal{V}_{1,2} = \mathcal{W}_{1,2}\,.$$

Il suffit alors d'appliquer les formules (7) et (11) avec $p = 1$ pour en déduire respectivement $\mathcal{V}_{2,1}, \mathcal{V}_{1,2}$ et $\mathcal{W}_{1,2}$. Par ailleurs, d'après [3, Exemple 8], on a également la relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) + \mathcal{W}_{2,1} = 2\zeta(3) - 1\,,$$

ce qui permet d'en déduire la valeur de $\mathcal{W}_{2,1}$ donnée par (18). $\square$

Remarque 5. On conjecture que la relation

$$\mathcal{W}_{1,2} = \mathcal{W}_{2,1} + \gamma\zeta(2) - \zeta(3)$$

déduite de (17) et (18) se prolonge de la façon suivante :

Conjecture. *Pour tout entier $p \geq 2$, la relation suivante est vraie :*

$$\mathcal{W}_{1,p} = \mathcal{W}_{p,1} + \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \mathcal{S}_{1,p}\,.$$

Références

[1] I. Blagouchine, M-A. Coppo, A note on some constants related to the zeta-function and their relationship with the Gregory coeffficients, *Ramanujan J.* **47** (2018), 457-473.

[2] B. Candelpergher, *Ramanujan Summation of Divergent Series*, Lecture Notes in Math. 2185, Springer, 2017.

[3] B. Candelpergher, M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *Ramanujan J.* **27** (2012), 305–328.

[4] B. Candelpergher, M-A. Coppo, Laurent expansion of harmonic zeta functions, *J. Math. Anal. App.* **491** (2020), Article 124309.

[5] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Math., vol. 240, Springer, 2007.

[6] M-A. Coppo, A note on some alternating series involving zeta and multiple zeta values, *J. Math. Anal. App.* **475** (2019), 1831–1841.

[7] A. Dil, K. N. Boyadzhiev, and I. A. Aliev, On values of the Riemann zeta function at positive integers, *Lithuanian Math. J.* **60** (2020), 9–24.

[8] T. Komatsu, Sums of products of Cauchy numbers including generalized poly-Cauchy numbers, *Tokyo J. Math.* **38** (2015), 45–74.

[9] R. Sitaramachandrarao, A formula of S. Ramanujan, *J. Number Theory* **25** (1987), 1–19.

[10] B. Sury, T. Wang, and F. Z. Zhao, Identities involving reciprocals of binomial coefficients, *J. Integer Sequences* **7** (2004), Article 04.2.8 .

[11] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, *J. Number Theory* **185** (2018), 160–193.