Nouvelles relations de réciprocité entre sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo, Bernard Candelpergher

Nouvelles relations de réciprocité entre sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo et Bernard Candelpergher
Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR 7351), Nice, France

Résumé. Dans cette étude, on applique le procédé de sommation de Ramanujan aux sommes d'Euler linéaires. Ceci nous permet d'établir de nouvelles relations de réciprocité entre sommes d'Euler parachevant les résultats déjà obtenus dans des travaux antérieurs.

Abstract. In this study, we apply the Ramanujan summation method to linear Euler sums. This enable us to establish new reflection formulas for these sums that complete results already achieved in our previous works.

Mathematics Subject Classification (2020): 11M06; 11M32; 40G99; 40-02.

Keywords: Harmonic numbers, Euler sums, Zeta values, Ramanujan summation.

Introduction

L'étude des sommes d'Euler a une assez longue histoire qui remonte au milieu du 18ème siècle. En réponse à une lettre de Goldbach datant de 1742, Euler a été amené à considérer, pour des entiers positifs p et q, des séries infinies de la forme

$$S_{p,q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q} \,,$$

Adresse e-mail : coppo@unice.fr (M-A. Coppo).

où les $H_n^{(p)}$ sont les nombres harmoniques généralisés qui, pour $p = 1$, se réduisent aux classiques nombres harmoniques $H_n = H_n^{(1)}$. L'importance des nombres harmoniques provient du fait qu'ils apparaissent (souvent de manière assez inattendue) dans différentes branches de la théorie des nombres et de la combinatoire. De nos jours, les sommes $S_{p,q}$ sont appelées *sommes d'Euler linéaires* (cf. [1, 10]). Euler a découvert que, pour tous les couples (p, q) vérifiant $p = 1$, ou $p = q$, ou $p+q$ impair, les sommes d'Euler linéaires pouvaient s'exprimer comme des combinaisons de valeurs de zêta (i.e. les valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ aux entiers positifs), un résultat remarquable qui, par la suite, sera retrouvé et complété par N. Nielsen[1].

Le procédé de sommation de Ramanujan figure dans le chapitre VI de son second *Notebook*. Desservie par les ambiguités (observées par Hardy[2]) dans la définition de la "constante d'une série" qui rendaient son utilisation malaisée, la méthode de Ramanujan, basée sur la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin, était quelque peu tombée dans l'oubli. Elle a connu un renouveau d'intérêt à la fin du 20ème siècle lorsqu'une définition claire et rigoureuse du procédé a été donnée en même temps que le lien avec la sommation usuelle était complètement éclairci. Une synthèse exhaustive des définitions, principales propriétés, et domaine d'application de la sommation de Ramanujan est contenue dans [3], monographie qui développe en outre un formalisme algébrique adéquat permettant d'englober le procédé de Ramanujan et les autres méthodes classiques de sommation des séries dans un même cadre unificateur (cf. [3, Chapitre 5]).

Le procédé de sommation de Ramanujan permettant de traiter à la fois le cas convergent et le cas divergent, on peut l'appliquer simultanément aux sommes d'Euler réciproques $S_{1,p}$ et $S_{p,1}$. Ceci nous permet d'établir une élégante formule pour la somme (au sens de Ramanujan) $S_{1,p} + S_{p,1}$ (cf. Propositions 3 et 4) qui prolonge la classique relation de réciprocité $S_{p,q} + S_{q,p} = \zeta(p)\zeta(q) + \zeta(p + q)$.

1 Préliminaires

1.1 Deux formules classiques pour les sommes d'Euler

Définition 1. Les nombres harmoniques généralisés sont définis pour tout entier positif p par

$$H_0^{(p)} = 0 \quad \text{et} \quad H_n^{(p)} := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} \quad \text{pour } n \geq 1\,.$$

1. Handbuch der Theorie der Gammafunction, Teubner, Leipzig, 1906.
2. Divergent Series, Clarendon press, Oxford, 1949, Chapitre XIII.

On pose $H_n := H_n^{(1)}$. On a (cf. [5, p. 95])

$$H_n = \psi(n+1) + \gamma \quad \text{et} \quad H_n^{(p)} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1) + \zeta(p)\,,$$

où ψ désigne la fonction digamma ($= \Gamma'/\Gamma$) et γ la constante d'Euler.

Pour des entiers positifs p et q avec $q \geq 2$, on définit la somme d'Euler linéaire $S_{p,q}$ par

$$S_{p,q} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q}\,.$$

On rappelle les deux célèbres identités suivantes qui sont dues à Euler[3] :

- la formule de réciprocité (cf. [1, Eq. (1.49)], [8, Eq. (3.4)], [10, Eq. (5.1)]) :

$$S_{p,q} + S_{q,p} = \zeta(p)\zeta(q) + \zeta(p+q) \qquad (p, q \geq 2)\,,$$

- la formule d'Euler (cf. [1, Eq. (1.50)], [8, Théorème 3.1], [10, Eq. (3.6)]) :

$$S_{1,2} = 2\zeta(3)\,, \quad 2S_{1,p} = (p+2)\zeta(p+1) - \sum_{j=1}^{p-2} \zeta(p-j)\zeta(j+1) \quad (p \geq 3)\,.$$

1.2 Sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

La méthode de sommation de Ramanujan (cf. [3]) permet de traiter à la fois le cas des sommes d'Euler convergentes et celui des sommes d'Euler divergentes. Une conséquence directe de [3, Théorème 3] est la relation de réciprocité suivante (cf. [3, Eq. (2.11)]) :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,. \tag{1}$$

Dans cette formule, le symbole $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}$ désigne la somme de la série au sens du procédé de sommation de Ramanujan (une définition précise de ces sommes sera donnée au paragraphe suivant).

L'identité suivante qui découle de [3, Eq. (1.33)] est, pour le procédé de sommation de Ramanujan, l'analogue de la formule d'Euler $S_{1,2} = 2\zeta(3)$. Elle s'écrit

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \tau_2 \tag{2}$$

3. Ces formules figurent dans *Meditationes circa singulare serierum genus* (1775), E477, Opera Omnia, Series 1, vol. 15, pp. 217–267. La formule d'Euler sera plusieurs fois redécouverte au cours du 20ème siècle (voir [8, Remarque 3.1] pour davantage de détails historiques).

avec

$$\tau_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n+2)}{n}.$$

Enfin, par soustraction de (1) et (3), on déduit immédiatement l'identité réciproque

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \tau_2. \tag{3}$$

Dans la suite, on va exposer une méthode générale qui permet de prolonger les identités précédentes.

1.3 Relations fonctionnelles

Afin d'étendre les formules (1), (2) et (3) précédentes, on commence par en donner une interprétation fonctionnelle.

Définition 2. Pour tout entier $p \geq 1$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,s) := \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(p)}}{n^s}.$$

La fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(p,s)$ est le prolongement analytique de la fonction définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(p)}\, n^{-s} - \int_1^{+\infty} \psi_p(x)\, x^{-s}\, dx\,,$$

avec $\psi_1(x) = \psi(x+1) + \gamma$, et pour $p > 1$,

$$\psi_p(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \partial^{p-1}\psi(x+1) + \zeta(p).$$

D'après [3, Théorème 9], la fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(p,s)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$ tout entier. En particulier, la valeur $\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)$ de cette fonction en $s = 1$ est la somme au sens de la sommation de Ramanujan de la série divergente $\sum_{n\geq 1} \frac{H_n^{(p)}}{n}$.

La fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(1,s)$ est reliée à la fonction zêta harmonique ζ_H[4] définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) := \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, n^{-s}\,,$$

au travers de la relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,s) = \zeta_H(s) - \int_1^{\infty} x^{-s} \left(\psi(x+1) + \gamma\right)\, dx \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

4. La fonction ζ_H est notée h dans [3, p. 72].

Comme $\zeta_H(p) = S_{1,p}$, on en déduit l'identité :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = S_{1,p} - \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx \qquad (p \geq 2)\,. \tag{4}$$

Avec ce formalisme, les identités (1), (2), et (3) peuvent alors se réécrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
&\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) + \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,,\\
&\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \tau_2\,,\\
&\zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \tau_2\,.
\end{aligned}$$

2 Extension de l'identité (2)

Pour prolonger l'identité (2), on commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 1. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose

$$\tau_p := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+p}\,\frac{\zeta(n+p)}{n} = \sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k\,\frac{\zeta(k)}{k-p}\,. \tag{5}$$

On a les relations

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2}\,dx = -\zeta'(2) - \tau_2\,,$$

et pour $p \geq 3$,

$$\int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j}\zeta(p-j) - (-1)^p\zeta'(p) - \tau_p\,. \tag{6}$$

Démonstration. Pour $p \geq 3$, le développement de Taylor du logarithme permet d'écrire

$$\ln(x+1) = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^k + (-1)^p x^{p-1} \int_1^\infty \frac{1}{t^{p-1}(t+x)}\,dt\,,$$

ce qui donne, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n^p} = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\frac{1}{n^{p-j}} + (-1)^p \int_1^\infty \frac{1}{t^{p-1}n(t+n)}\,dt\,.$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = (-1)^p \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j}\zeta(p-j)\,. \tag{7}$$

Par ailleurs, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ln(1+\frac{1}{n})\,.$$

En développant $\ln(1+1/n)$ en série entière, on obtient l'expression (cf. [2, Proposition 2]) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ln(1+\frac{1}{n}) = (-1)^{p-1}\,\tau_p\,,$$

d'où il résulte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = -\zeta'(p) - (-1)^p\,\tau_p\,.$$

La formule (6) se déduit alors de (7) par identification. Pour $p = 2$, cette formule se réduit simplement à

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^2} = -\zeta'(2) - \tau_2\,.$$

□

L'identité (2) admet la généralisation suivante qui est l'analogue, pour la sommation de Ramanujan, de la formule d'Euler pour la sommation ordinaire.

Proposition 1. Pour tout entier $p \geq 3$,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = S_{1,p} - \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j}\,\zeta(p-j) + (-1)^p\zeta'(p) + \tau_p\,, \tag{8}$$

où τ_p est la somme alternée définie par la formule (5). En particulier, pour $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) = (p+1)\zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \zeta(2p-j)\zeta(j+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j}\zeta(2p-j) + \zeta'(2p) + \tau_{2p}\,. \tag{9}$$

Démonstration. D'après (4), on a la relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = S_{1,p} - \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx\,,$$

et d'après (6), on a l'égalité

$$(-1)^p \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx = -\zeta'(p) - (-1)^p\tau_p + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)\,.$$

La formule (8) en découle immédiatement. En exprimant $S_{1,2p}$ à l'aide de la formule d'Euler, on obtient l'identité (9). □

Exemple 1.

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) &= 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \tau_2\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,4) &= 3\zeta(5) - \zeta(3)\zeta(2) + \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2) + \zeta'(4) + \tau_4\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,6) &= 4\zeta(7) - \zeta(3)\zeta(4) - \zeta(2)\zeta(5) + \zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(4) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2)\\
&\qquad + \zeta'(6) + \tau_6\,.
\end{aligned}$$

Remarque 1. On notera l'analogie formelle entre (9) et la formule obtenue en changeant p en $-p$ qui a été donnée dans [7, Eq. (8)] :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-2p) = \frac{1-2p}{2}\zeta(1-2p) + \zeta'(-2p) + \nu_{2p} \qquad \text{pour } p \geq 1\,,$$

avec

$$\nu_p := \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\zeta(n)}{n+p}\,.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(1,-2) &= \zeta'(-2) + \nu_2 + \frac{1}{24}\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,-4) &= \zeta'(-4) + \nu_4 - \frac{1}{80}\,.
\end{aligned}$$

3 Extension de l'identité (3)

L'identité (3) admet la généralisation suivante :

Proposition 2. Pour tout entier $p \geq 2$,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - S_{1,p} - \sigma_p - \zeta'(p) - (-1)^p\tau_p\,, \tag{10}$$

avec $\sigma_2 = 1$, et pour $p \geq 3$,

$$\sigma_p = \frac{1+(-1)^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\zeta(p-j)\left[\frac{(j-1)!(p-1-j)!}{(p-1)!} - \frac{1}{j}\right]. \tag{11}$$

En particulier, pour $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) = \gamma\zeta(2p) - p\,\zeta(2p+1) + \sum_{j=1}^{p-1}\zeta(2p-j)\zeta(j+1) - \sigma_{2p} - \zeta'(2p) - \tau_{2p}\,. \tag{12}$$

Démonstration. On part des égalités suivantes :

$$\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{1}{n}\zeta(p) = -\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p} = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1)\,.$$

En sommant (au sens de Ramanujan) ces égalités, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{\zeta(p)}{n}\right) &= -\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p}\\
&= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n}\frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1)\\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\partial^{p-1}\psi(x+1)\frac{1}{x}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^p} - \zeta(p+1)\,,$$

ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{\zeta(p)}{n}\right) = \zeta(p+1) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\partial^{p-1}\psi(x+1)\frac{1}{x}\,dx\,.$$

On a donc

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{H_n^{(p)}}{n} = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\partial^{p-1}\psi(x+1)\frac{1}{x}\,dx\,,$$

c'est à dire :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - S_{1,p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx\,. \tag{13}$$

On calcule l'intégrale figurant dans le second membre de (13) en intégrant $p-1$ fois par parties. Pour $p=2$, on obtient simplement

$$\int_1^{+\infty}\frac{\partial\psi(x+1)}{x}\,dx = \int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2}\,dx\ -1\,,$$

ce qui (par le Lemme 1) permet de retrouver l'identité (7). Dans la suite, on suppose $p\geq 3$. De l'identité (cf. [5, Proposition 9.6.41])

$$\partial^{p-k}\psi(2) = (-1)^{p-k}(p-k)! + (-1)^{p-k+1}(p-k)!\zeta(p-k+1) \qquad (p-k\geq 1)\,,$$

découle la relation

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx = (-1)^p\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1) - \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)!\,.$$

Le dernier terme peut se simplifier par la formule (cf. [9, Eq. (14)]) :

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)! = \frac{1}{p-1}\sum_{k=0}^{p-2}\frac{(-1)^k}{\binom{p-2}{k}} = \frac{1+(-1)^p}{p}\,.$$

Après réindexation, on a aussi

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1) = -\sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j)\,.$$

Enfin, par (6), on peut écrire

$$(-1)^p\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx = \sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j) - \zeta'(p) - (-1)^p\tau_p\,.$$

Finalement, il résulte de la formule (13) l'expression

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - S_{1,p} - \zeta'(p) - (-1)^p\tau_p - \sigma_p\,,$$

avec

$$\sigma_p = \frac{1+(-1)^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j) - \sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)$$

ce qui démontre la formule (10). La formule (12) s'en déduit aussitôt par la formule d'Euler. □

Exemple 2. On calcule les premières valeurs de σ_p :

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \frac{1}{2}\zeta(2)\,,\\
\sigma_4 &= \frac{2}{3}\zeta(3) - \frac{1}{3}\zeta(2) + \frac{1}{2}\,,\\
\sigma_5 &= \frac{3}{4}\zeta(4) - \frac{5}{12}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(2)\,,\\
\sigma_6 &= \frac{4}{5}\zeta(5) - \frac{9}{20}\zeta(4) + \frac{9}{10}\zeta(3) - \frac{1}{5}\zeta(2) + \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit les identités

$$
\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(3,1) &= \gamma\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(2) - \zeta'(3) + \tau_3\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(4,1) &= \gamma\zeta(4) - 2\zeta(5) + \zeta(3)\zeta(2) - \frac{2}{3}\zeta(3) + \frac{1}{3}\zeta(2) - \frac{1}{2} - \zeta'(4) - \tau_4\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(5,1) &= \gamma\zeta(5) - \frac{3}{4}\zeta(6) - \frac{3}{4}\zeta(4) + \frac{1}{2}(\zeta(3))^2 + \frac{5}{12}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2) - \zeta'(5) + \tau_5
\end{aligned}
$$

Remarque 2. On peut déduire de [4, Eq. (27)], par identification, une expression alternative de σ_p. Soit

$$
Z(i,j) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i\,(n+1)^j} \qquad (i,j \geq 1)\,.
$$

Par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{n^i\,(n+1)^j}$, les sommes $Z(i,j)$ s'expriment comme des combinaisons de valeurs de zêta et de constantes entières :

$$
\begin{aligned}
Z(1,1) &= 1\,,\\
Z(1,j) &= j - \sum_{r=0}^{j-2}\zeta(j-r) \qquad (j \geq 2)\,,\\
Z(i,1) &= (-1)^{i-1} + \sum_{r=0}^{i-2}(-1)^r\zeta(i-r) \qquad (i \geq 2)\,,\\
Z(i,j) &= (-1)^i\sum_{r=0}^{j-2}\binom{i+r-1}{i-1}\zeta(j-r) + \sum_{r=0}^{i-2}(-1)^r\binom{j+r-1}{j-1}\zeta(i-r)\\
&\quad + (-1)^{i-1}\binom{i+j-1}{j-1} \qquad (i,j \geq 2)\,.
\end{aligned}
$$

La formule [4, Eq. (27)] se traduit alors par l'identité

$$
\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}\,Z(p-k,k) = \sigma_p\,.
$$

Remarque 3. La formule suivante (cf. [3, Eq. (3.23)]), dont une nouvelle preuve est donnée en appendice, permet de prolonger la formule (10) pour $p = 1$. On a

$$
\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \tau_1\,, \tag{14}
$$

où γ_1 est la première constante de Stieltjes

$$
\gamma_1 = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}\frac{\ln n}{n} = \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln^2(N)\right\}\,,
$$

et

$$\tau_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) .$$

4 Extension de l'identité (1)

On est à présent en mesure de prolonger la relation de réciprocité (1) en distinguant le cas pair du cas impair.

4.1 Le cas pair

Proposition 3. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1, 2p) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p, 1) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} (-1)^j A_j \, \zeta(2p-j) - \frac{1}{p} \qquad (15)$$

avec

$$A_j = \frac{(j-1)!(2p-1-j)!}{(2p-1)!} .$$

Démonstration. En ajoutant les identités (9) et (12) , on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p, 1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1, 2p) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j} \zeta(2p-j) - \sigma_{2p} . \qquad (16)$$

L'identité (15) s'en déduit en remplaçant σ_{2p} par l'expression donnée par (11). $\square$

Exemple 3. Pour $p = 1, 2, 3$, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\zeta^{\mathcal{R}}(1, 2) + \zeta^{\mathcal{R}}(2, 1) = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1 , \\
&\zeta^{\mathcal{R}}(1, 4) + \zeta^{\mathcal{R}}(4, 1) = \gamma\zeta(4) + \zeta(5) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{6}\zeta(2) - \frac{1}{2} , \\
&\zeta^{\mathcal{R}}(1, 6) + \zeta^{\mathcal{R}}(6, 1) = \gamma\zeta(6) + \zeta(7) + \frac{1}{5}\zeta(5) - \frac{1}{20}\zeta(4) + \frac{1}{30}\zeta(3) - \frac{1}{20}\zeta(2) - \frac{1}{3} .
\end{aligned}$$

4.2 Le cas impair

Proposition 4. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
&\zeta^{\mathcal{R}}(1, 2p-1) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p-1, 1) \\
&\qquad = \gamma\zeta(2p-1) + \zeta(2p) - \sum_{j=1}^{2p-3} (-1)^j C_j \, \zeta(2p-1-j) \\
&\qquad\qquad - 2\zeta'(2p-1) + 2\tau_{2p-1} \qquad (17)
\end{aligned}$$

avec

$$C_j = \frac{(j-1)!(2p-2-j)!}{(2p-2)!} - \frac{2}{j}\,.$$

Démonstration. En ajoutant les identités (8) et (10), on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \sigma_p - (-1)^p \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)$$
$$+ (1-(-1)^p)\tau_p + ((-1)^p - 1)\zeta'(p)\,.$$

Il en résulte la formule suivante

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p-1,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,2p-1) = \zeta(2p) + \gamma\zeta(2p-1) - \sigma_{2p-1} + \sum_{j=1}^{2p-3} \frac{(-1)^j}{j}\zeta(2p-1-j)$$
$$- 2\zeta'(2p-1) + 2\tau_{2p-1}$$

d'où se déduit l'identité (17) en exprimant σ_{2p-1} par (11). Remarquons qu'à la différence du cas pair, le terme constant de σ_{2p-1} est nul. □

Exemple 4. Pour $p = 2, 3, 4$, on obtient les relations suivantes :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,3) + \zeta^{\mathcal{R}}(3,1) = \gamma\zeta(3) + \zeta(4) - \frac{3}{2}\zeta(2) - 2\zeta'(3) + 2\tau_3\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,5) + \zeta^{\mathcal{R}}(5,1) = \gamma\zeta(5) + \zeta(6) - \frac{7}{4}\zeta(4) + \frac{11}{12}\zeta(3) - \frac{7}{12}\zeta(2) - 2\zeta'(5) + 2\tau_5\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,7) + \zeta^{\mathcal{R}}(7,1) = \gamma\zeta(7) + \zeta(8) - \frac{11}{6}\zeta(6) + \frac{29}{30}\zeta(5) - \frac{17}{30}\zeta(4) + \frac{2}{5}\zeta(3) - \frac{11}{30}\zeta(2)$$
$$- 2\zeta'(7) + 2\tau_7\,.$$

5 Formules de réciprocité et nombres de Cauchy

On va à présent donner une interprétation des formules précédentes à l'aide des nombres de Cauchy.

On considère la suite des nombres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,, \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-x)\,dx \quad (n \geq 1)\,,$$

ou, alternativement, par la relation de récurrence

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{j!(n-j)} = \frac{1}{n} \quad (n \geq 2)\,.$$

Les rationnels λ_n sont traditionnellement appelés (depuis L. Comtet[5]) *nombres de*

5. *Advanced Combinatorics*, Reidel, 1974, p. 293.

Cauchy[6] bien que le lien avec des travaux de Cauchy soit historiquement difficile à établir. Les premiers termes de la suite sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,,\ \lambda_2 = \frac{1}{6}\,,\ \lambda_3 = \frac{1}{4}\,,\ \lambda_4 = \frac{19}{30}\,,\ \lambda_5 = \frac{9}{4}\,,\ \lambda_6 = \frac{863}{84}\,,\ \text{etc.}$$

Les identités suivantes sont bien connues (cf. [3, Eqs. (4.24), (4.30)]) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{1}{n} = \gamma\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1\,.$$

D'après [3, Eq. (4.29)] et la formule (14), on a aussi

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \tau_1\,.$$

D'après [3, Théorème 18] et les formules (3)–(7), on a les identités réciproques

$$\begin{aligned} \zeta^{\mathcal{R}}(1,2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \tau_2\,, \\ \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \tau_2\,, \end{aligned} \tag{18}$$

qui permettent de réécrire la relation de réciprocité (1) sous la forme suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2} = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,. \tag{19}$$

Enfin, d'après [4, Exemple 8], on a la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n} = 2\zeta(3) - 1\,. \tag{20}$$

En combinant entre-elles les identités précédentes, on déduit facilement les formules suivantes qui sont nouvelles :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n\,H_{n-1}}{n} &= \zeta(3) - \gamma\zeta(2)\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n} &= -\zeta'(2) - \tau_2 - 1\,. \end{aligned} \tag{21}$$

6. Dans [3, Chapitre 4], les nombres $(-1)^{n-1}\lambda_n$ sont notés β_n et appelés *nombres de Bernoulli de seconde espèce* ; dans [5, p. 25], ils sont appelés *δ-nombres de Bernoulli.*

Appendice

On donne ici une nouvelle preuve de la formule (14) :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \tau_1\,.$$

La relation

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2(x+1)\,dx$$

(cf. [3, Eq. (2.6) p. 40]) est une conséquence directe de [3, Théorème 3]. Comme $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$, elle peut aussi s'écrire

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) + 2\frac{\psi(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1\,.$$

Or, d'après [5, p. 145], on a

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) - \frac{2\gamma}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\,dx = 2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1\,.$$

Par soustraction, on obtient

$$2\int_0^1 \left((\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1 - (2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1)\,.$$

Comme

$$(\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,,$$

on en déduit l'identité

$$2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1\,.$$

Le développement de ψ en série entière :

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1} \qquad (|x| < 1)$$

permet d'identifier l'intégrale du membre de gauche avec la série τ_1 :

$$\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n} = \tau_1.$$

On obtient alors la formule (14) après division par 2.

Références

[1] H. Alzer, J. Choi, Four parametric linear Euler sums, *J. Math. Anal. App.* **484** (2020), Article 123661.

[2] K. Boyadzhiev, A special constant and series with zeta values and harmonic numbers. *Gazeta Matematica*, Seria A, **115** (2018), 1–16.

[3] B. Candelpergher, *Ramanujan Summation of Divergent Series*, Lecture Notes in Math. 2185, Springer, 2017.

[4] B. Candelpergher, M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *Ramanujan J.* **27** (2012), 305–328.

[5] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Math., vol. 240, Springer, 2007.

[6] M-A. Coppo, Sur les sommes d'Euler divergentes, *Expo. Math.* **18** (2000), 297–308.

[7] M-A. Coppo, A note on some alternating series involving zeta and multiple zeta values, *J. Math. Anal. App.* **475** (2019), 1831–1841.

[8] R. Sitaramachandrarao, A formula of S. Ramanujan, *J. Number Theory* **25** (1987), 1–19.

[9] B. Sury, T. Wang, and F. Z. Zhao, Identities involving reciprocals of binomial coefficients, *J. Integer Sequences* **7** (2004), Article 04.2.8 .

[10] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, *J. Number Theory* **185** (2018), 160–193.