Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo, Bernard Candelpergher

Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo et Bernard Candelpergher

Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR 7351), Nice, France

Résumé. Dans cette étude, on applique le procédé de de Ramanujan de sommation des séries à certaines sommes d'Euler linéaires ce qui nous permet d'établir de nouvelles identités prolongeant celles déjà obtenues dans des travaux antérieurs.

Introduction

L'étude des sommes d'Euler a une assez longue histoire qui remonte au milieu du 18ème siècle. En réponse à une lettre de Goldbach datant de 1742, Euler a été amené à considérer, pour des entiers positifs p et q, des séries infinies de la forme

$$S_{p,q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q} \,,$$

où les $H_n^{(p)}$ sont les nombres harmoniques généralisés qui, pour $p = 1$, se réduisent aux classiques nombres harmoniques $H_n = H_n^{(1)}$. L'importance des nombres harmoniques provient du fait qu'ils apparaissent (parfois de manière assez inattendue) dans différentes branches de la théorie des nombres et de la combinatoire. Les séries $S_{p,q}$ sont appelées de nos jours les sommes d'Euler *linéaires*. Euler a découvert que pour tous les couples (p, q) vérifiant $p = 1$, ou $p = q$, ou $p + q$ impair, les sommes d'Euler linéaires pouvaient s'exprimer comme des combinaisons de valeurs de zêta (i.e. les valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ aux entiers positifs), un résultat remarquable qui, par la suite, sera retrouvé et complété par N. Nielsen[1].

1. Handbuch der Theorie der Gammafunction, Teubner, Leipzig, 1906.

Le procédé de Ramanujan de sommation des séries figure dans le chapitre VI de son second *Notebook*. Desservie par les ambiguités (observées par Hardy[2]) dans la définition de la "constante d'une série" qui rendaient son utilisation malaisée, la méthode de Ramanujan, basée sur la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin, était quelque peu tombée dans l'oubli. Elle a connu un renouveau d'intérêt à la fin du 20ème siècle lorsqu'une définition claire et rigoureuse du procédé a été donnée en même temps que le lien avec la sommation usuelle était complètement éclairci. Une synthèse exhaustive des définitions, principales propriétés, et domaine d'application de la sommation de Ramanujan est contenue dans [Can], monographie qui développe en outre un formalisme algébrique adéquat permettant d'englober le procédé de Ramanujan et les autres méthodes classiques de sommation des séries dans un même cadre unificateur (cf. [Can, Chapitre 5]).

Dans cette étude, on applique le procédé de sommation de Ramanujan aux sommes d'Euler réciproques $S_{p,1}$ et $S_{1,p}$. Ceci nous permet d'établir de nouvelles identités (voir les Propositions 1 à 4) qui généralisent celles déjà données précédemment dans [Can] et [CC].

1 Préliminaires

Définition 1. Les nombres harmoniques généralisés sont définis pour tout entier positif p par

$$H_0^{(p)} = 0 \quad \text{et} \quad H_n^{(p)} := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^p} \quad \text{pour } n \geq 1\,.$$

On pose $H_n := H_n^{(1)}$. On a (cf. [Coh, p. 95])

$$H_n = \psi(n+1) + \gamma \qquad \text{et} \qquad H_n^{(p)} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1) + \zeta(p)\,,$$

où ψ désigne la fonction digamma et γ la constante d'Euler.

Pour des entiers positifs p et q avec $q \geq 2$, on définit la somme d'Euler linéaire $S_{p,q}$ par

$$S_{p,q} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q}\,.$$

On rappelle qu'on a la relation de réciprocité (cf. [Sit, Eq. (3.4)])

$$S_{p,q} + S_{q,p} = \zeta(p)\zeta(q) + \zeta(p+q) \qquad (\text{ pour } p \geq 2 \text{ et } q \geq 2)\,,$$

2. Divergent Series, Clarendon press, Oxford, 1949, Chapitre XIII.

ainsi que la formule d'Euler[3] (cf. [Sit, Théorème 3.1] , [WL, Eq. (3.6)]) :

$$2S_{1,p} = (p+2)\zeta(p+1) - \sum_{k=1}^{p-2} \zeta(p-k)\zeta(k+1)\,.$$

1.1 Sommation de Ramanujan

Du point de vue de la sommation de Ramanujan, on a démontré la relation de réciprocité suivante (cf. [Can, Eq. (2.11)]) qui est une conséquence directe de [Can, Théorème 3] :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,, \tag{1}$$

où le symbole $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}$ désigne la somme de la série au sens du procédé de sommation de Ramanujan (cf. [Can]). D'autre part, on a l'identité suivante qui résulte de [Can, Eq. (1.33)] :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2} \tag{2}$$

avec

$$\nu_{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\zeta(n+2)}{n}\,.$$

Cette identité est, pour le procédé de sommation de Ramanujan, l'analogue de la formule d'Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3)\,.$$

Par soustraction de (1) et (2), on déduit que

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \nu_{-2}\,. \tag{3}$$

Dans la suite, on va donner une méthode permettant de prolonger les identités précédentes.

---

3. Cette célèbre formule apparaît pour la première fois dans *Meditationes circa singulare serierum genus* (1775), Opera Omnia, Series 1, vol. 15, pp. 217–264, elle sera maintes fois redécouverte au cours des siècles suivants.

1.2 Relations fonctionnelles

Avant d'étendre les formules (1), (2) et (3), on commence par en donner une interprétation fonctionnelle.

Définition 2. Pour tout entier $p \geq 1$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,s) := \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(p)}}{n^s} .$$

D'après [Can, Théorème 9], la fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(p,s)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$ tout entier. En particulier, la valeur $\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)$ de cette fonction en $s=1$ est la somme au sens de la sommation de Ramanujan de la série divergente $\sum_{n\geq 1} \frac{H_n^{(p)}}{n}$.

La fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(1,s)$ est reliée à la fonction zêta harmonique ζ_H[4] définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) := \sum_{n=1}^{\infty} H_n \, n^{-s} ,$$

au travers de la relation (cf. [Can, Théorème 2])

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,s) = \zeta_H(s) - \int_1^{\infty} x^{-s} \left(\psi(x+1) + \gamma\right) \, dx \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1) . \tag{4}$$

Comme $\zeta_H(p) = S_{1,p}$, les valeurs spéciales aux entiers positifs de la fonction ζ_H sont données par la formule d'Euler :

$$\zeta_H(p) = \frac{1}{2}(p+2)\zeta(p+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-2} \zeta(p-k)\zeta(k+1) \quad (p \geq 3) .$$

En particulier,

$$\zeta_H(2p) = (p+1)\zeta(2p+1) - \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1) \quad (p \geq 2) . \tag{E}$$

Les identités (1), (2), et (3) peuvent se réécrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} \zeta^{\mathcal{R}}(1,2) + \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) &= \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1 , \\ \zeta^{\mathcal{R}}(1,2) &= 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2} , \\ \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) &= \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \nu_{-2} . \end{aligned}$$

4. La fonction ζ_H est notée h dans [Can].

2 Extension de l'identité (2)

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 1. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose

$$\nu_{-p} := (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\zeta(n+p)}{n} \, . \tag{5}$$

On a les relations

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2} \, dx = -\nu_{-2} - \zeta'(2) \, ,$$

et pour $p \geq 3$,

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p} \, dx = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j} \zeta(p-j) - \nu_{-p} - (-1)^p \zeta'(p) \, . \tag{6}$$

Démonstration. Le développement de Taylor du logarithme permet d'écrire

$$\ln(x+1) = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^k + (-1)^p x^{p-1} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{p-1}(t+x)} \, dt \, ,$$

ce qui donne, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n^p} = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \frac{1}{n^{p-j}} + (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{p-1} n(t+n)} \, dt \, .$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p} \, dx + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \zeta(p-j) \, .$$

Par ailleurs, en écrivant $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$, on peut développer le dernier terme en série entière puis, en sommant, obtenir alors l'expression suivante (cf. [Bo, Proposition 2])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = -\zeta'(p) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\zeta(n+p)}{n} = -\zeta'(p) - (-1)^p \, \nu_{-p} \, .$$

La formule (6) en résulte. □

L'identité (2) admet la généralisation suivante qui est l'analogue, pour la sommation de Ramanujan, de la formule d'Euler (E) pour la sommation ordinaire.

Proposition 1. Pour tout entier $p \geq 3$,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \zeta_H(p) - \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j}\,\zeta(p-j) + (-1)^p \zeta'(p) + \nu_{-p}\,, \tag{7}$$

où ν_{-p} est la série définie par la formule (5) . En particulier

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) = (p+1)\zeta(2p+1) - \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j}\zeta(2p-j) + \zeta'(2p) + \nu_{-2p}. \tag{8}$$

Démonstration. D'après (4), on a la relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \zeta_H(p) - \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx\,,$$

et d'après (6), on a l'égalité

$$(-1)^p \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx = -\zeta'(p) - (-1)^p \nu_{-p} + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)\,.$$

La formule (7) en découle immédiatement. En exprimant alors $\zeta_H(2p)$ à l'aide de (E), on obtient l'identité (8). □

Exemple 1.

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,3) = \frac{5}{4}\zeta(4) - \zeta(2) - \zeta'(3) + \nu_{-3}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,4) = 3\zeta(5) - \zeta(3)\zeta(2) + \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2) + \zeta'(4) + \nu_{-4}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,6) = 4\zeta(7) - \zeta(3)\zeta(4) - \zeta(2)\zeta(5) + \zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(4) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2) + \zeta'(6) + \nu_{-6}\,.$$

Remarque 1. On notera l'analogie formelle entre (8) et la formule "duale" (cf. [Cop, Eq. (8)] :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-2p) = \frac{1-2p}{2}\zeta(1-2p) + \zeta'(-2p) + \nu_{2p} \qquad \text{pour } p \geq 1$$

avec

$$\nu_p := \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+p} \qquad (p \geq -1)\,.$$

En particulier,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-2) = \zeta'(-2) + \nu_2 + \frac{1}{24}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-4) = \zeta'(-4) + \nu_4 - \frac{1}{80}\,.$$

3 Extension de l'identité (3)

L'identité (3) admet la généralisation suivante :

Proposition 2. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \zeta_H(p) - \sigma_p - \zeta'(p) - (-1)^p \nu_{-p}\,, \tag{9}$$

avec $\sigma_2 = 1$, et pour $p \geq 3$,

$$\sigma_p = \frac{1+(-1)^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2} (-1)^j \zeta(p-j) \left[\frac{(j-1)!(p-1-j)!}{(p-1)!} - \frac{1}{j} \right] . \tag{10}$$

En particulier,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) = \gamma\zeta(2p) - p\,\zeta(2p+1) + \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1) - \sigma_{2p} - \zeta'(2p) - \nu_{-2p} \tag{11}$$

Démonstration. On a

$$\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{1}{n}\zeta(p) = -\frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \partial^{p-1} \psi(n+1)\,.$$

En sommant, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{1}{n}\zeta(p) \right) &= - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} \\
&= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \partial^{p-1} \psi(n+1) \\
&= - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \int_1^{+\infty} \partial^{p-1} \psi(x+1) \frac{1}{x}\, dx\,.
\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^p} - \zeta(p+1)\,,$$

ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{\zeta(p)}{n} \right) = \zeta(p+1) - \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \int_1^{+\infty} \partial^{p-1} \psi(x+1) \frac{1}{x}\, dx\,.$$

On a donc

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(p)}}{n} = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \int_1^{+\infty} \partial^{p-1} \psi(x+1) \frac{1}{x}\, dx$$

C'est à dire :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)=\gamma\zeta(p)+\zeta(p+1)-\zeta_H(p)+\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx\,. \tag{12}$$

On intègre $p-1$ fois par parties. Pour $p\geq 3$, l'identité

$$\partial^{p-k}\psi(2)=(-1)^{p-k}(p-k)!+(-1)^{p-k+1}(p-k)!\zeta(p-k+1)$$

permet d'obtenir la relation

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx=(-1)^p\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx\\&+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1)-\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)!\,.\end{aligned}$$

Le dernier terme admet la simplification suivante (cf. [Sur, Eq. (14)])

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)!=\frac{1}{p-1}\sum_{k=0}^{p-2}\frac{(-1)^k}{\binom{p-2}{k}}=\frac{1+(-1)^p}{p}\,,$$

et on a aussi, après réindexation,

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1)=-\sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j)\,.$$

Enfin, par (6), on peut écrire

$$(-1)^p\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx=\sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)-\zeta'(p)-(-1)^p\nu_{-p}\,.$$

D'où finalement, il résulte de (12) l'écriture suivante de $\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)$:

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)=\gamma\zeta(p)+\zeta(p+1)-\zeta_H(p)-\zeta'(p)-(-1)^p\nu_{-p}-\sigma_p\,,$$

avec

$$\sigma_p=\frac{1+(-1)^p}{p}+\sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j)-\sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)$$

ce qui démontre la formule (9). La formule (11) s'en déduit par (E). □

Exemple 2. On calcule les premières valeurs de σ_p :

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \frac{1}{2}\zeta(2)\,,\\
\sigma_4 &= \frac{2}{3}\zeta(3) - \frac{1}{3}\zeta(2) + \frac{1}{2}\,,\\
\sigma_5 &= \frac{3}{4}\zeta(4) - \frac{5}{12}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(2)\,,\\
\sigma_6 &= \frac{4}{5}\zeta(5) - \frac{9}{20}\zeta(4) + \frac{9}{10}\zeta(3) - \frac{1}{5}\zeta(2) + \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit les identités

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(3,1) &= \gamma\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(2) - \zeta'(3) + \nu_{-3}\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(4,1) &= \gamma\zeta(4) - 2\zeta(5) + \zeta(3)\zeta(2) - \frac{2}{3}\zeta(3) + \frac{1}{3}\zeta(2) - \frac{1}{2} - \zeta'(4) - \nu_{-4}\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(5,1) &= \gamma\zeta(5) - \frac{3}{4}\zeta(6) - \frac{3}{4}\zeta(4) + \frac{1}{2}(\zeta(3))^2 + \frac{5}{12}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2) - \zeta'(5) + \nu_{-5}
\end{aligned}$$

Remarque 2. On peut déduire de (9), par identification avec [CC, Eq. (27)], que

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k}\, Z(p-k,k) \quad \text{avec} \quad Z(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i\,(n+1)^j}\,.$$

4 Extension de la relation de réciprocité (1)

L'identité (1) admet le prolongement suivant :

4.1 Le cas pair

Proposition 3. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} (-1)^j A_j\, \zeta(2p-j) - \frac{1}{p} \tag{13}$$

avec

$$A_j = \frac{(j-1)!(2p-1-j)!}{(2p-1)!}\,.$$

Démonstration. En ajoutant les identités (8) et (11) , on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j}\, \zeta(2p-j) - \sigma_{2p}\,. \tag{14}$$

L'identité (13) s'en déduit en remplaçant σ_{2p} par l'expression donnée par (10). □

Exemple 3. Pour $p = 1, 2, 3$, on obtient les relations suivantes :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) + \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,4) + \zeta^{\mathcal{R}}(4,1) = \gamma\zeta(4) + \zeta(5) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{6}\zeta(2) - \frac{1}{2}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,6) + \zeta^{\mathcal{R}}(6,1) = \gamma\zeta(6) + \zeta(7) + \frac{1}{5}\zeta(5) - \frac{1}{20}\zeta(4) + \frac{1}{30}\zeta(3) - \frac{1}{20}\zeta(2) - \frac{1}{3}\,.$$

4.2 Le cas impair

Proposition 4. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p-1) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p-1,1) = \gamma\zeta(2p-1) + \zeta(2p) - \sum_{j=1}^{2p-3}(-1)^j C_j\,\zeta(2p-1-j) - 2\zeta'(2p-1) + 2\nu_{1-2p} \quad (15)$$

avec

$$C_j = \frac{(j-1)!(2p-2-j)!}{(2p-2)!} - \frac{2}{j}\,.$$

Démonstration. En ajoutant les identités (7) et (9), on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \sigma_p - (-1)^p \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j) + (1-(-1)^p)\nu_{-p} + ((-1)^p - 1)\zeta'(p)\,.$$

Il en résulte la formule suivante

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p-1,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,2p-1) = \zeta(2p) + \gamma\zeta(2p-1) - \sigma_{2p-1} + \sum_{j=1}^{2p-3} \frac{(-1)^j}{j}\zeta(2p-1-j) - 2\zeta'(2p-1) + 2\nu_{1-2p} \quad (16)$$

d'où se déduit l'identité (15) en exprimant σ_{2p-1} par (10). Remarquons qu'à la différence du cas pair, le terme constant de σ_{2p-1} est nul. □

Exemple 4. Pour $p = 2, 3, 4$, on obtient les relations suivantes :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,3) + \zeta^{\mathcal{R}}(3,1) = \gamma\zeta(3) + \zeta(4) - \frac{3}{2}\zeta(2) - 2\zeta'(3) + 2\nu_{-3}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,5) + \zeta^{\mathcal{R}}(5,1) = \gamma\zeta(5) + \zeta(6) - \frac{7}{4}\zeta(4) + \frac{11}{12}\zeta(3) - \frac{7}{12}\zeta(2) - 2\zeta'(5) + 2\nu_{-5}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,7) + \zeta^{\mathcal{R}}(7,1) = \gamma\zeta(7) + \zeta(8) - \frac{11}{6}\zeta(6) + \frac{29}{30}\zeta(5) - \frac{17}{30}\zeta(4) + \frac{2}{5}\zeta(3) - \frac{11}{30}\zeta(2) - 2\zeta'(7) + 2\nu_{-7}\,.$$

Remarque 3. On a la formule suivante (cf. [Can, Eq. (3.23)]) dont une nouvelle preuve est donnée en appendice :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \nu_{-1}\,, \tag{17}$$

où γ_1 est la première constante de Stieltjes :

$$\gamma_1 = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln j}{j} - \frac{1}{2}\ln^2 n \right\}.$$

Ceci permet de prolonger la formule (15) pour $p = 1$ comme suit :

$$2\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \gamma^2 - \zeta(2) + 2\gamma_1 + 2\nu_{-1}\,.$$

Remarque 4. Un autre prolongement intéressant de l'identité (1) est donné par la formule suivante (cf. [Can, Eq. (2.10)]) :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p+1,p) + \zeta^{\mathcal{R}}(p,p+1) = \zeta^{\mathcal{R}}(p)\zeta(p+1) + \zeta(2p+1) - \frac{1}{p} \qquad (p \geq 1) \tag{18}$$

avec

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p) := \begin{cases} \zeta(p) - \dfrac{1}{p-1} & \text{pour } p \neq 1 \\ \gamma & \text{pour } p = 1. \end{cases}$$

5 Interprétation des formules précédentes avec les nombres de Cauchy

On considère la suite des nombres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-x)\,dx \quad (n \geq 1).$$

Les rationnels λ_n sont traditionnellement appelés *nombres de Cauchy*[5] bien que le lien avec des travaux de Cauchy soit historiquement difficile à établir. Les premiers termes de la suite sont

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,,\ \lambda_2 = \frac{1}{6}\,,\ \lambda_3 = \frac{1}{4}\,,\ \lambda_4 = \frac{19}{30}\,,\ \lambda_5 = \frac{9}{4}\,,\ \lambda_6 = \frac{863}{84}\,,\ \text{etc.}$$

5. Dans [Can, Chapitre 4], les nombres $\beta_n = (-1)^{n-1}\lambda_n$ sont appelés *nombres de Bernoulli de seconde espèce*, et *δ-nombres de Bernoulli* dans [Coh].

D'après [Can, Théorème 18], on a les identités duales

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n^{(2)}}{n}\,, \tag{19}$$

et

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n}{n^2}\,. \tag{20}$$

L'équation (1) peut alors se réécrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n^{(2)}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n}{n^2} = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,. \tag{21}$$

Comme on a aussi montré (cf. [CC, Exemple 8]) la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n^{(2)}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{(H_n)^2}{n} = 2\,\zeta^{\mathcal{R}}(3) = 2\zeta(3) - 1\,,$$

on peut en déduire deux nouvelles identités :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n\,H_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{(H_n)^2}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n}{n^2} = \zeta(3) - \gamma\zeta(2)\,, \tag{22}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{(H_n)^2}{n} = 2\zeta(3) - 1 - \zeta^{\mathcal{R}}(1,2) = -\zeta'(2) - \nu_{-2} - 1\,. \tag{23}$$

Cette dernière généralisant l'identité bien connnue (cf. [Can, Eq. (4.30)])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1\,.$$

D'après [Can, Eq. (4.29)] et (17), on a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{1}{n^2} = \zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \nu_{-1}\,, \tag{24}$$

formule qui généralise une autre identité bien connue (cf. [Can, Eq. (4.24)])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{1}{n} = \gamma\,.$$

Appendice

On donne ici une nouvelle preuve de la formule (17) :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \nu_{-1}\,.$$

La relation

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2(x+1)\,dx$$

(cf. [Can, Eq. (2.6) p. 40]) est une conséquence directe de [Can, Théorème 3]. Comme $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$, elle peut aussi s'écrire

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) + 2\frac{\psi(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1\,.$$

Or, d'après [Coh, p. 145], on a

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) - \frac{2\gamma}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\,dx = 2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1\,.$$

Par soustraction, on obtient

$$2\int_0^1 \left((\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1 - (2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1)\,.$$

Comme

$$(\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,,$$

on en déduit l'identité

$$2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1\,.$$

Le développement de ψ en série entière :

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1} \qquad (|x| < 1)$$

permet d'identifier l'intégrale du membre de gauche avec la série ν_{-1} :

$$\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n} = \nu_{-1}.$$

Après division par 2, la formule en résulte.

Références

[Bo] K. Boyadzhiev, A special constant and series with zeta values and harmonic numbers. Gazeta Matematica, Seria A, **115** (2018), 1–16.

[Can] B. Candelpergher, Ramanujan Summation of Divergent Series, Lecture Notes in Math. 2185, Springer, 2017.

[CC] B. Candelpergher, M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *Ramanujan J.* **27** (2012), 305–328.

[Coh] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Math., vol. 240, Springer, 2007.

[Cop] M-A. Coppo, A note on some alternating series involving zeta and multiple zeta values, *J. Math. Anal. App.* **475** (2019), 1831–1841.

[Sit] R. Sitaramachandrarao, A formula of S. Ramanujan, *J. Number Theory* **25** (1987), 1–19.

[Sur] B. Sury, Identities involving reciprocals of binomial coefficients, *J. Integer Sequences*, Vol. 7 (2004), Article 04.2.8 .

[WL] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, *J. Number Theory* **185** (2018), 160–193.