Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo et Bernard Candelpergher
Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR 7351), Nice, France

Résumé. Dans cette étude, on applique le procédé de de Ramanujan de sommation des séries à certaines sommes d'Euler linéaires ce qui nous permet d'établir de nouvelles identités qui prolongent quelques-unes déjà obtenues dans des travaux antérieurs.

Introduction

L'étude des sommes d'Euler a une assez longue histoire qui remonte au milieu du 18ème siècle. En réponse à une lettre de Goldbach datant de 1742, Euler a été amené à considérer, pour des entiers positifs p et q, des séries infinies de la forme

$$S_{p,q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q} \, ,$$

où les $H_n^{(p)}$ sont les nombres harmoniques généralisés $\sum_{k=1}^{n} k^{-p}$ qui, pour $p = 1$, se réduisent aux classiques nombres harmoniques $H_n = H_n^{(1)}$. L'importance des nombres harmoniques provient du fait qu'ils apparaissent (parfois de manière assez inattendue) dans différentes branches de la théorie des nombres et de la combinatoire. Les séries $S_{p,q}$ sont appelées de nos jours les sommes d'Euler *linéaires*. Euler a découvert que pour tous les couples (p, q) vérifiant $p = 1$, ou $p = q$, ou $p + q$ impair, les sommes d'Euler linéaires pouvaient s'exprimer comme des combinaisons de valeurs de zêta (i.e. les valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ aux entiers positifs), un résultat remarquable qui, par la suite, sera retrouvé et complété par N. Nielsen[1].

1. Handbuch der Theorie der Gammafunction, Teubner, Leipzig, 1906.

Le procédé de Ramanujan de sommation des séries figure dans le chapitre VI de son second *Notebook*. Desservie par les ambiguités (observées par Hardy[2]) dans la définition de la “constante d’une série” qui rendaient son utilisation malaisée, la méthode de Ramanujan, basée sur la formule sommatoire d’Euler-MacLaurin, était quelque peu tombée dans l’oubli. Elle a connu un renouveau d’intérêt à la fin du 20ème siècle lorsqu’une définition claire et rigoureuse du procédé a été donnée en même temps que le lien avec la sommation usuelle était complètement éclairci. Une synthèse exhaustive des définitions, principales propriétés, et domaine d’application de la sommation de Ramanujan est contenue dans [Can], monographie qui développe en outre un formalisme algébrique adéquat permettant d’englober le procédé de Ramanujan et les autres méthodes classiques de sommation des séries dans un même cadre unificateur (cf. [Can, Chapitre 5]).

Dans cette étude, on applique le procédé de sommation de Ramanujan aux sommes d’Euler réciproques $S_{p,1}$ et $S_{1,p}$. Cela nous permet d’établir de nouvelles identités (voir les Propositions 1 à 4) qui généralisent certaines formules précédemment données dans [Can] et [CC].

1 Préliminaires

Définition 1. Les nombres harmoniques généralisés sont définis pour tout entier positif p par

$$H_0^{(p)} = 0 \quad \text{et} \quad H_n^{(p)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \quad \text{pour } n \geq 1\,.$$

On pose $H_n := H_n^{(1)}$. On a (cf. [Coh, p. 95])

$$H_n = \psi(n+1) + \gamma \qquad \text{et} \qquad H_n^{(p)} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\partial^{p-1}\psi(n+1) + \zeta(p)\,,$$

où ψ désigne la fonction digamma et γ la constante d’Euler.

Pour des entiers positifs p et q avec $q \geq 2$, on définit la somme d’Euler linéaire $S_{p,q}$ par

$$S_{p,q} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(p)}}{n^q}\,.$$

On rappelle la formule de réciprocité (cf. [AV, Sit])

$$S_{p,q} + S_{q,p} = \zeta(p)\zeta(q) + \zeta(p+q) \qquad (p \geq 2, q \geq 2)\,,$$

2. Divergent Series, Clarendon press, Oxford, 1949, Chapitre XIII.

ainsi que la formule d'Euler[3] (cf. [AV, Sit, WL]) :

$$2S_{1,p} = (p+2)\zeta(p+1) - \sum_{k=1}^{p-2} \zeta(p-k)\zeta(k+1)\,.$$

1.1 Sommation de Ramanujan

Du point de vue de la sommation de Ramanujan, on a démontré la relation de réciprocité suivante (cf. [Can, Eq. (2.11)]) qui est une conséquence directe de [Can, Théorème 3] :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,, \tag{1}$$

où le symbole $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}$ désigne la somme de la série au sens du procédé de sommation de Ramanujan (cf. [Can]). D'autre part, on a l'identité suivante qui résulte de [Can, Eq. (1.33)] :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2} \tag{2}$$

avec

$$\nu_{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n+2)}{n}\,.$$

Cette identité est, pour le procédé de sommation de Ramanujan, l'analogue de la formule d'Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3)\,.$$

Dans [Cop], on a donné l'identité "duale" :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^2 H_n = -\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-2) + \nu_2\,.$$

avec

$$\nu_2 = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+2}\,.$$

Par soustraction de (1) et (2), on obtient aussi

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \nu_{-2}\,. \tag{3}$$

Dans la suite, on va donner une méthode pour prolonger les identités précédentes.

3. Cette célèbre formule apparaît pour la première fois dans *Meditationes circa singulare serierum genus* (1775), Opera Omnia, Series 1, vol. 15, pp. 217–264, elle sera maintes fois redécouverte au cours des siècles suivants.

1.2 Relations fonctionnelles

Afin de prolonger les formules (1), (2) et (3), on commence par en donner une interprétation fonctionnelle.

Définition 2. Pour tout entier $p \geq 1$ et $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,s) := \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(p)}}{n^s}\,.$$

D'après [Can, Théorème 9], la fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(p,s)$ est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$ tout entier. En particulier, la valeur $\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)$ de cette fonction en $s=1$ est la somme au sens de la sommation de Ramanujan de la série divergente $\sum_{n\geq 1} \frac{H_n^{(p)}}{n}$.

Soit ζ_H la fonction zêta harmonique d'Apostol-Vu[4] définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) := \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, n^{-s}\,,$$

La fonction $s \mapsto \zeta^{\mathcal{R}}(1,s)$ est reliée à la fonction ζ_H au travers de la relation (cf. [Can, Théorème 2])

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,s) = \zeta_H(s) - \int_1^{\infty} x^{-s}\left(\psi(x+1)+\gamma\right)\,dx \qquad (\mathrm{Re}(s)>1)\,. \tag{4}$$

Comme $\zeta_H(p) = S_{1,p}$, les valeurs spéciales aux entiers positifs de la fonction ζ_H sont données par la formule d'Euler :

$$\zeta_H(p) = \frac{1}{2}(p+2)\zeta(p+1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-2}\zeta(p-k)\zeta(k+1) \quad (p \geq 3)\,.$$

En particulier,

$$\zeta_H(2p) = (p+1)\zeta(2p+1) - \sum_{k=1}^{p-1}\zeta(2p-k)\zeta(k+1) \quad (p \geq 2)\,. \tag{E}$$

Les identités (1), (2), et (3) peuvent se réécrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) + \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) &= \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) &= 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2}\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(2,1) &= \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 - \zeta'(2) - \nu_{-2}\,.
\end{aligned}$$

4. La fonction ζ_H est notée H dans [AV] et h dans [Can].

2 Extension de l'identité (2)

On commence par montrer le lemme suivant :

Définition 3. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose

$$\nu_{-p} := (-1)^p \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\zeta(n+p)}{n} \, .$$

Lemme 1. On a les relations

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^2} \, dx = -\nu_{-2} - \zeta'(2) \, ,$$

et pour $p \geq 3$,

$$\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p} \, dx = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j} \zeta(p-j) - \nu_{-p} - (-1)^p \zeta'(p) \, . \tag{5}$$

Démonstration. Le développement de Taylor du logarithme permet d'écrire

$$\ln(x+1) = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^k + (-1)^p x^{p-1} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{p-1}(t+x)} \, dt \, ,$$

ce qui donne, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n^p} = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \frac{1}{n^{p-j}} + (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{p-1} n (t+n)} \, dt \, .$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p} \, dx + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \zeta(p-j) \, .$$

Par ailleurs, en écrivant $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$, on peut développer le dernier terme en série entière puis, en sommant, obtenir alors l'expression suivante (cf. [Bo, Proposition 2])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p} = -\zeta'(p) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{\zeta(n+p)}{n} = -\zeta'(p) - (-1)^p \, \nu_{-p} \, .$$

La formule (5) en résulte. □

L'identité (2) admet la généralisation suivante qui est l'analogue, pour la sommation de Ramanujan, de la formule d'Euler (E) pour la sommation ordinaire.

Proposition 1. Pour tout entier $p \geq 3$,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \zeta_H(p) - \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^{p-j}}{j}\,\zeta(p-j) + (-1)^p \zeta'(p) + \nu_{-p}\,. \qquad (6)$$

En particulier

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) = (p+1)\zeta(2p+1) - \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j}\zeta(2p-j) + \zeta'(2p) + \nu_{-2p}. \qquad (7)$$

Démonstration. D'après (4), on a la relation

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \zeta_H(p) - \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx\,,$$

et d'après (5), on a l'égalité

$$(-1)^p \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx = -\zeta'(p) - (-1)^p \nu_{-p} + \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)\,.$$

La formule (6) en découle immédiatement. En exprimant alors $\zeta_H(2p)$ à l'aide de (E), on obtient l'identité (7). $\square$

Exemple 1.

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,3) = \frac{5}{4}\zeta(4) - \zeta(2) - \zeta'(3) + \nu_{-3}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,4) = 3\zeta(5) - \zeta(3)\zeta(2) + \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2) + \zeta'(4) + \nu_{-4}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,6) = 4\zeta(7) - \zeta(3)\zeta(4) - \zeta(2)\zeta(5) + \zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(4) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2) + \zeta'(6) + \nu_{-6}\,.$$

Remarque 1. On notera l'analogie formelle entre (7) et la formule "duale" donnée dans [Cop] :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-2p) = \frac{1-2p}{2}\zeta(1-2p) + \zeta'(-2p) + \nu_{2p} \qquad \text{pour } p \geq 1$$

avec

$$\nu_p := \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+p} \qquad (p \geq -1)\,.$$

En particulier,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,-4) = \zeta'(-4) + \nu_4 - \frac{1}{80}\,.$$

3 Extension de l'identité (3)

L'identité (3) admet la généralisation suivante :

Proposition 2. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \zeta_H(p) - \sigma_p - \zeta'(p) - (-1)^p \nu_{-p}\,, \tag{8}$$

avec $\sigma_2 = 1$, et pour $p \geq 3$,

$$\sigma_p = \frac{1+(-1)^p}{p} + \sum_{j=1}^{p-2} (-1)^j \zeta(p-j) \left[\frac{(j-1)!(p-1-j)!}{(p-1)!} - \frac{1}{j} \right]. \tag{9}$$

En particulier,

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) = \gamma\zeta(2p) - p\,\zeta(2p+1) + \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1) - \sigma_{2p} - \zeta'(2p) - \nu_{-2p} \tag{10}$$

Démonstration. On a

$$\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{1}{n}\zeta(p) = -\frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \partial^{p-1}\psi(n+1)\,.$$

En sommant, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{1}{n}\zeta(p) \right) &= -\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} \\
&= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \partial^{p-1}\psi(n+1) \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \int_1^{+\infty} \partial^{p-1}\psi(x+1) \frac{1}{x}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{+\infty} \frac{1}{m^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^p} - \zeta(p+1)\,,$$

ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \left(\frac{H_n^{(p)}}{n} - \frac{\zeta(p)}{n} \right) = \zeta(p+1) - \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \int_1^{+\infty} \partial^{p-1}\psi(x+1) \frac{1}{x}\,dx\,.$$

On a donc

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(p)}}{n} = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^p} + \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \int_1^{+\infty} \partial^{p-1}\psi(x+1) \frac{1}{x}\,dx$$

C'est à dire :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)=\gamma\zeta(p)+\zeta(p+1)-\zeta_H(p)+\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx\,. \tag{11}$$

On intègre $p-1$ fois par parties. Pour $p\geq 3$, l'identité

$$\partial^{p-k}\psi(2)=(-1)^{p-k}(p-k)!+(-1)^{p-k+1}(p-k)!\zeta(p-k+1)$$

permet d'obtenir la relation

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\int_1^{+\infty}\frac{\partial^{p-1}\psi(x+1)}{x}\,dx=(-1)^p\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx$$
$$+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1)-\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)!\,.$$

Le dernier terme admet la simplification suivante (cf. [Sur, Eq. (14)])

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k k!(p-k-2)!=\frac{1}{p-1}\sum_{k=0}^{p-2}\frac{(-1)^k}{\binom{p-2}{k}}=\frac{1+(-1)^p}{p}\,,$$

et on a aussi, après réindexation,

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{k=0}^{p-3}(-1)^k k!(p-k-2)!\,\zeta(p-k-1)=-\sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j)\,.$$

Enfin, par (5), on peut écrire

$$(-1)^p\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx=\sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)-\zeta'(p)-(-1)^p\nu_{-p}\,.$$

D'où finalement, il résulte de (11) l'écriture suivante de $\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)$:

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1)=\gamma\zeta(p)+\zeta(p+1)-\zeta_H(p)-\zeta'(p)-(-1)^p\nu_{-p}-\sigma_p\,,$$

avec

$$\sigma_p=\frac{1+(-1)^p}{p}+\sum_{j=1}^{p-2}(-1)^j\frac{(j-1)!(p-j-1)!}{(p-1)!}\,\zeta(p-j)-\sum_{j=1}^{p-2}\frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j)$$

ce qui démontre la formule (8). La formule (10) s'en déduit par (E). $\square$

Exemple 2. On calcule les premières valeurs de σ_p :

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \frac{1}{2}\zeta(2)\,,\\
\sigma_4 &= \frac{2}{3}\zeta(3) - \frac{1}{3}\zeta(2) + \frac{1}{2}\,,\\
\sigma_5 &= \frac{3}{4}\zeta(4) - \frac{5}{12}\zeta(3) + \frac{1}{4}\zeta(2)\,,\\
\sigma_6 &= \frac{4}{5}\zeta(5) - \frac{9}{20}\zeta(4) + \frac{9}{10}\zeta(3) - \frac{1}{5}\zeta(2) + \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit les identités

$$\begin{aligned}
\zeta^{\mathcal{R}}(3,1) &= \gamma\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(2) - \zeta'(3) + \nu_{-3}\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(4,1) &= \gamma\zeta(4) - 2\zeta(5) + \zeta(3)\zeta(2) - \frac{2}{3}\zeta(3) + \frac{1}{3}\zeta(2) - \frac{1}{2} - \zeta'(4) - \nu_{-4}\,,\\
\zeta^{\mathcal{R}}(5,1) &= \gamma\zeta(5) - \frac{3}{4}\zeta(6) - \frac{3}{4}\zeta(4) + \frac{1}{2}(\zeta(3))^2 + \frac{5}{12}\zeta(3) - \frac{1}{4}\zeta(2) - \zeta'(5) + \nu_{-5}
\end{aligned}$$

Remarque 2. En idientifiant avec [CC, Eq. (27)], on a aussi la formule

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} Z(p-k,k) \quad \text{avec} \quad Z(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i\,(n+1)^j}\,.$$

4 Extension de la formule de réciprocité (1)

L'identité (1) admet les généralisations suivantes.

4.1 Le cas pair

Proposition 3. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} (-1)^j A_j\,\zeta(2p-j) - \frac{1}{p} \tag{12}$$

avec

$$A_j = \frac{(j-1)!(2p-1-j)!}{(2p-1)!}\,.$$

Démonstration. En ajoutant les identités (7) et (10) , on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,2p) = \gamma\zeta(2p) + \zeta(2p+1) - \sum_{j=1}^{2p-2} \frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(2p-j) - \sigma_{2p}\,. \tag{13}$$

L'identité (12) s'en déduit en remplaçant σ_{2p} par l'expression donnée par (9). □

Exemple 3. Pour $p = 1, 2, 3$, on obtient les relations suivantes :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) + \zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \gamma\zeta(2) + \zeta(3) - 1\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,4) + \zeta^{\mathcal{R}}(4,1) = \gamma\zeta(4) + \zeta(5) + \frac{1}{3}\zeta(3) - \frac{1}{6}\zeta(2) - \frac{1}{2}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,6) + \zeta^{\mathcal{R}}(6,1) = \gamma\zeta(6) + \zeta(7) + \frac{1}{5}\zeta(5) - \frac{1}{20}\zeta(4) + \frac{1}{30}\zeta(3) - \frac{1}{20}\zeta(2) - \frac{1}{3}\,.$$

4.2 Le cas impair

Proposition 4. Pour tout entier $p \geq 2$, on a

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2p-1) + \zeta^{\mathcal{R}}(2p-1,1) = \gamma\zeta(2p-1) + \zeta(2p) - \sum_{j=1}^{2p-3}(-1)^j C_j\,\zeta(2p-1-j) \\ - 2\zeta'(2p-1) + 2\nu_{1-2p} \quad (14)$$

avec

$$C_j = \frac{(j-1)!(2p-2-j)!}{(2p-2)!} - \frac{2}{j}\,.$$

Démonstration. En ajoutant les identités (6) et (8), on obtient

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,p) = \gamma\zeta(p) + \zeta(p+1) - \sigma_p - (-1)^p \sum_{j=1}^{p-2} \frac{(-1)^j}{j}\,\zeta(p-j) \\ + (1-(-1)^p)\nu_{-p} + ((-1)^p - 1)\zeta'(p)\,.$$

Il en résulte la formule suivante

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2p-1,1) + \zeta^{\mathcal{R}}(1,2p-1) = \zeta(2p) + \gamma\zeta(2p-1) - \sigma_{2p-1} + \sum_{j=1}^{2p-3}\frac{(-1)^j}{j}\zeta(2p-1-j) \\ - 2\zeta'(2p-1) + 2\nu_{1-2p} \quad (15)$$

d'où se déduit l'identité (14) en exprimant σ_{2p-1} par (9). Remarquons qu'à la différence du cas pair, le terme constant de σ_{2p-1} est nul. $\square$

Exemple 4. Pour $p = 2, 3, 4$, on obtient les relations suivantes :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,3) + \zeta^{\mathcal{R}}(3,1) = \gamma\zeta(3) + \zeta(4) - \frac{3}{2}\zeta(2) - 2\zeta'(3) + 2\nu_{-3}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,5) + \zeta^{\mathcal{R}}(5,1) = \gamma\zeta(5) + \zeta(6) - \frac{7}{4}\zeta(4) + \frac{11}{12}\zeta(3) - \frac{7}{12}\zeta(2) - 2\zeta'(5) + 2\nu_{-5}\,,$$
$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,7) + \zeta^{\mathcal{R}}(7,1) = \gamma\zeta(7) + \zeta(8) - \frac{11}{6}\zeta(6) + \frac{29}{30}\zeta(5) - \frac{17}{30}\zeta(4) + \frac{2}{5}\zeta(3) - \frac{11}{30}\zeta(2) \\ - 2\zeta'(7) + 2\nu_{-7}\,.$$

Remarque 3. On a la formule suivante (cf. [Can, Eq. (3.23)]) dont une nouvelle preuve est donnée en appendice :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \gamma_1 + \nu_{-1}\,, \tag{16}$$

où γ_1 est la première constante de Stieltjes :

$$\gamma_1 = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln j}{j} - \frac{1}{2}\ln^2 n \right\} .$$

Ceci permet de prolonger la formule (14) pour $p = 1$ comme suit :

$$2\zeta^{\mathcal{R}}(1,1) = \gamma^2 - \zeta(2) + 2\gamma_1 + 2\nu_{-1}\,.$$

Remarque 4. Un autre prolongement intéressant de l'identité (1) est donné par la formule suivante (cf. [Can, Eq. (2.10)]) :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p+1,p) + \zeta^{\mathcal{R}}(p,p+1) = \zeta^{\mathcal{R}}(p)\zeta(p+1) + \zeta(2p+1) - \frac{1}{p} \qquad (p \geq 1) \tag{17}$$

avec

$$\zeta^{\mathcal{R}}(p) := \begin{cases} \zeta(p) - \dfrac{1}{p-1} & \text{pour } p \neq 1 \\ \gamma & \text{pour } p = 1. \end{cases}$$

5 Interprétation des formules(1), (2), et (3) avec les nombres de Cauchy

D'après [Can, Théorème 18], on a les identités duales

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n^{(2)}}{n}\,, \tag{18}$$

$$\zeta^{\mathcal{R}}(2,1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!} \frac{H_n}{n^2} \tag{19}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} = \int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(n-x)\,dx \quad (n \geq 1).$$

Les rationnels λ_n sont traditionnellement appelés *nombres de Cauchy* bien que le lien avec des travaux de Cauchy soit historiquement difficile à établir.

L'équation (1) peut alors se réécrire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2}=\gamma\zeta(2)+\zeta(3)-1\,.$$

Comme on a aussi (cf. [CC, Exemple 8]) la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n}=2\,\zeta^{\mathcal{R}}(3)=2\zeta(3)-1\,,$$

on en déduit les nouvelles identités

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n\,H_{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2}=\zeta(3)-\gamma\zeta(2)\,, \tag{20}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n}=2\zeta(3)-1-\zeta^{\mathcal{R}}(1,2)=-\zeta'(2)-\nu_{-2}-1\,. \tag{21}$$

Appendice

On donne ici une nouvelle preuve de la formule (16) :

$$\zeta^{\mathcal{R}}(1,1)=\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\zeta(2)+\gamma_1+\nu_{-1}\,.$$

La relation

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{H_n}{n}=\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1\psi^2(x+1)\,dx$$

(cf. [Can, Eq. (2.6) p. 40]) est une conséquence directe de [Can, Théorème 3]. Comme $\psi(x+1)=\psi(x)+1/x$, elle peut aussi s'écrire

$$\int_0^1\left(\psi^2(x)+2\frac{\psi(x)}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{H_n}{n}-\gamma^2-\zeta(2)+1\,.$$

Or, d'après [Coh, p. 145], on a

$$\int_0^1\left(\psi^2(x)-\frac{2\gamma}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=2\gamma_1-2\zeta(2)+1\,.$$

Par soustraction, on obtient

$$2\int_0^1\left((\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{H_n}{n}-\gamma^2-\zeta(2)+1-(2\gamma_1-2\zeta(2)+1)\,.$$

Comme
$$(\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,,$$
on en déduit l'identité
$$2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1\,.$$
Le développement de ψ en série entière :
$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1} \qquad (|x|<1)$$
permet d'identifier l'intégrale du membre de gauche avec la série ν_{-1} :
$$\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\zeta(n+1)}{n} = \nu_{-1}.$$
Après division par 2, la formule en résulte.

Références

[AV] T. M. Apostol, T. H. Vu, Dirichlet series related to the Riemann zeta function, *J. Number Theory* **19** (1984), 85-102.

[Bo] K. Boyadzhiev, A special constant and series with zeta values and harmonic numbers. Gazeta Matematica, Seria A, **115** (2018), 1–16.

[Can] B. Candelpergher, Ramanujan Summation of Divergent Series, Lecture Notes in Math. 2185, Springer, 2017.

[CC] B. Candelpergher, M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *Ramanujan J.* **27** (2012), 305–328.

[Coh] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Math., vol. 240, Springer, 2007.

[Cop] M-A. Coppo, A note on some alternating series involving zeta and multiple zeta values, *J. Math. Anal. App.* **475** (2019), 1831–1841.

[Sit] R. Sitaramachandrarao, A formula of S. Ramanujan, *J. Number Theory* **25** (1987), 1–19.

[Sur] B. Sury, Identities involving reciprocals of binomial coefficients, *J. Integer Sequences*, Vol. 7 (2004), Article 04.2.8 .

[WL] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, *J. Number Theory* **185** (2018), 160–193.