HAL open science

Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo, Bernard Candelpergher

▶ **To cite this version:**

Marc-Antoine Coppo, Bernard Candelpergher. Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler. 2019. hal-02352474v1

HAL Id: hal-02352474

https://hal.univ-cotedazur.fr/hal-02352474v1

Preprint submitted on 6 Nov 2019 (v1), last revised 17 Aug 2020 (v6)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo et Bernard Candelpergher

Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR 7351), Nice, France

Résumé. Dans cette étude, on applique le procédé de Ramanujan de sommation des séries à certaines sommes d'Euler linéaires. Ceci nous permet de donner une réinterprétation de certains résultats présentés dans des travaux antérieurs et d'en fournir un prolongement naturel.

Introduction

L'étude des sommes d'Euler a une assez longue histoire qui remonte au milieu du 18ème siècle. En réponse à une lettre de Goldbach datant de 1742, Euler a été amené à considérer, pour des entiers positifs p et r, des séries infinies de la forme

$$S_{r,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^p} \,,$$

où les $H_n^{(r)}$ sont les nombres harmoniques généralisés $\sum_{k=1}^{n} 1/k^r$ qui, pour $r = 1$, se réduisent aux nombres harmoniques classiques $H_n = H_n^{(1)}$. L'importance des nombres harmoniques provient du fait qu'ils apparaissent (parfois de manière assez inattendue) dans différentes branches de la théorie des nombres et de la combinatoire. Les séries $S_{r,p}$ sont appelées de nos jours les sommes d'Euler *linéaires*. Euler a découvert que pour tous les couples (r, p) vérifiant $r = 1$, ou $r = p$, ou $r + p$ impair, les sommes d'Euler linéaires pouvaient s'exprimer comme des combinaisons de valeurs de zêta (i.e. les valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} 1/n^s$ aux entiers positifs), un résultat remarquable qui, par la suite, sera retrouvé et complété par N. Nielsen[1].

1. Handbuch der Theorie der Gammafunction, Teubner, Leipzig, 1906.

Le procédé de Ramanujan de sommation des séries figure dans le chapitre VI de son second *Notebook*. Desservie par les ambiguités (observées par Hardy[2]) dans la définition de la "constante d'une série" qui rendaient son utilisation malaisée, la méthode de Ramanujan, basée sur la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin, était quelque peu tombée dans l'oubli. Elle a connu un renouveau d'intérêt à la fin du 20ème siècle lorsqu'une définition claire et rigoureuse du procédé a été donnée en même temps que le lien avec la sommation usuelle a été complètement éclairci. Une synthèse exhaustive des définitions, principales propriétés, et domaine d'application de la sommation de Ramanujan est contenue dans [2], monographie qui développe en outre un formalisme algébrique adéquat permettant d'englober le procédé de Ramanujan et les autres méthodes classiques de sommation des séries dans un même cadre unificateur (cf. [2, Chapitre 5]).

Dans cette étude, on applique le procédé de sommation de Ramanujan à certaines sommes d'Euler linéaires. Cela nous permet de donner un prolongement naturel à plusieurs résultats déjà obtenus précédemment dans [2] et [3].

1 Préliminaires

On rappelle la belle identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) \tag{$\star$}$$

qui est un cas particulier d'une formule plus générale obtenue par Euler[3] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{2p}} = (p+1)\,\zeta(2p+1) - \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1) \tag{$\star\star$}$$

(pour une démonstration récente de la formule d'Euler, cf. [6, Corollaire 3.3]). Du point de vue de la sommation de Ramanujan, on a démontré l'identité suivante (cf. [2, Eq. (2.11), p. 45]) :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \zeta(3) + \gamma\zeta(2) - 1\,, \tag{1}$$

où le symbole $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}$ désigne la somme de la série au sens du procédé de Ramanujan (cf. [2]), et γ la constante d'Euler-Mascheroni. D'autre part, on a également montré (cf. [3, Théorème 10]) que

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 + K_2 \tag{2}$$

2. Divergent Series, Clarendon press, Oxford, 1949, Chapitre XIII.

3. Meditationes circa singulare serierum genus (1775), E477. *Opera Omnia*, Series 1, vol. 15, pp. 217–264.

avec

$$K_p := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p}\,.$$

En écrivant $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$, en développant le dernier terme en série entière puis en sommant, on obtient l'expression

$$K_p = -\zeta'(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\zeta(k+p) = -\zeta'(p) - (-1)^p\,\nu_{-p}\,, \tag{3}$$

(cf. [1, Proposition 2]), où on a adopté la notation suivante (cf. [5]) :

$$\nu_k := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1-k}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+k} & \text{pour tout entier } k \leq -1 \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+k} & \text{pour tout entier } k \geq -1. \end{cases}$$

En particulier,

$$K_2 = -\zeta'(2) - \nu_{-2}\,.$$

Par soustraction de (1) et (2), on obtient alors

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2} \tag{4}$$

qui est l'analogue de la formule ($\star$) pour le procédé de sommation de Ramanujan. Rappelons qu'on a donné dans [5] une identité "réciproque" assez similaire :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^2 H_n = -\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-2) + \nu_2\,.$$

Dans la suite, on va donner différentes interprétations et généralisations des identités précédentes.

2 Interprétation de l'identité (1) avec les nombres de Cauchy

On considère les nombres rationnels β_n, appelés nombres de Cauchy (ou nombres de Bernoulli de seconde espèce)[4], qui sont définis par la fonction génératrice

$$\frac{z}{\ln(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < 1\,.$$

4. La dénomination "nombres de Cauchy" a été introduite par Comtet et adoptée par de nombreux auteurs bien que le lien avec des travaux de Cauchy soit historiquement difficile à établir. Dans[4, Chapitre 9], les nombres β_n sont appelés "nombres de δ-Bernoulli". Dans [5] et [7], une autre notation classique (introduite par Jordan) b_n à la place de $\beta_n/n!$ est utilisée.

Ils se calculent par récurrence ou s'obtiennent directement par la formule intégrale (cf. [3, Eq. (4.3), p. 121])

$$\beta_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)\,dx\,.$$

Les β_n alternent en signe de sorte que $|\beta_n| = (-1)^{n-1}\beta_n$. Dans la suite, on reprend la notation adoptée dans [3] en posant $\lambda_n := |\beta_n|$. On a ainsi pour les premières valeurs de n :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,, \lambda_2 = \frac{1}{6}\,, \lambda_3 = \frac{1}{4}\,, \lambda_4 = \frac{19}{30}\,, \lambda_5 = \frac{9}{4}\,, \lambda_6 = \frac{863}{84}\,, \dots$$

D'après [3, Définition 11 et Théorème 6] (voir aussi [2, Théorème 18]), on a les identités

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n}\,, \tag{5}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2}\,. \tag{6}$$

D'après [3, Exemple 8], on a aussi la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n} = 2\zeta(3) - 1\,.$$

Il en résulte les nouvelles identités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - \zeta'(2) - \nu_{-2} - 1 \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2}\,, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n} = -\zeta'(2) - \nu_{-2} - 1\,, \tag{9}$$

qui généralisent les identités bien connues (cf. [2, Eq. (4.24) et (4.30)], [3, Exemple 8], [7, Eq. (5.7) et (5.8)]) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{1}{n} = \gamma \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1\,.$$

3 Interprétation fonctionnelle de l'identité (1)

Avant d'étendre la formule (1), on commence par en donner une interprétation fonctionnelle. Pour cela, on introduit la fonction zêta modifiée d'ordre 1 notée ici ζ_{mod}[5] qui est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$, par

$$\zeta_{\text{mod}}(s) := \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(s)}}{n}$$

D'après [3, Théorèmes 6 et 11], on a

$$\zeta_{\text{mod}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!\, n} \zeta_{1-n}(s, 1)$$

avec (cf. [7, Eq. (2.3)])

$$\zeta_{-m}(s, a) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (a + j)^{-s} .$$

La fonction ζ_{mod} est une fonction entière (cf. [3, Théorème 7]). On considère également la fonction $\zeta_H^{\mathcal{R}}$ définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ par

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(s) := \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n\, n^{-s} .$$

La fonction $\zeta_H^{\mathcal{R}}$ est une fonction entière (cf.[2, Théorème 9]), elle est reliée à la fonction zêta harmonique ζ_H[6] définie pour $\text{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) := \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, n^{-s} ,$$

au travers de la relation (cf. [2, p. 72])

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(s) = \zeta_H(s) - \int_1^{\infty} x^{-s} \left(\psi(x+1) + \gamma\right) dx , \quad (\text{Re}(s) > 1) \tag{10}$$

où ψ désigne la fonction digamma. La fonction ζ_H se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec un pôle double en $s = 1$ et des pôles simples en les

5. Dans [3], la fonction ζ_{mod} est notée F_1. On rappelle que la fonction zêta modifiée d'ordre 0 est la fonction $s \mapsto \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{-s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$.

6. Dans [2], la fonction ζ_H est notée h.

valeurs $s = 0$ et $s = 1-2k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ (cf. [2, p. 72]). Avec ces notations, l'identité (1) peut alors se réécrire sous la forme équivalente :

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(2) + \zeta_{\mathrm{mod}}(2) = \zeta(3) + \gamma\zeta(2) - 1.$$

On notera également la relation

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(1) = \zeta_{\mathrm{mod}}(1) = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!\,n^2} = -\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x}\right) \ln x \, dx\,.$$

4 Extension de l'identité (1)

Comme on va le voir, l'équation (1) n'est en fait qu'un cas particulier d'une formule plus générale. Plus précisément, on va montrer la proposition suivante :

Proposition 1. Soit p un entier positif.

a) Si p est pair, on a

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) - \frac{2}{p} + \sum_{k=1}^{p-2} (-1)^k \alpha_{k,p}\, \zeta(p-k) \tag{11}$$

où, pour $k = 1, 2, \ldots, p-2$, les coefficients $\alpha_{k,p}$ sont des rationnels positifs.

b) Si p est impair (et $p \neq 1$), on a

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \frac{\zeta(p-1)}{p-1} - \sum_{k=2}^{p-2} (-1)^k \delta_{k,p}\, \zeta(p-k) - 2\zeta'(p) + 2\nu_{-p} \tag{12}$$

où, pour $k = 2, \ldots, p-2$, les coefficients $\delta_{k,p}$ sont des rationnels positifs.

c) Si $p = 1$, on a

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(1) + \zeta_{mod}(1) = -\zeta(2) + \gamma^2 + 2\gamma_1 + 2\nu_{-1}\,, \tag{13}$$

où γ_1 est la première constante de Stieltjes :

$$\gamma_1 = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln j}{j} - \frac{1}{2}\ln^2 n \right\}.$$

Exemple 1. a) Pour les premières valeurs paires de p, on obtient les relations suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \zeta(3) + \gamma\zeta(2) - 1\,,$$
$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^4} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(4)}}{n} = \zeta(5) + \gamma\zeta(4) - \frac{5}{3}\zeta(3) + \frac{5}{6}\zeta(2) - \frac{1}{2}\,,$$
$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^6} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(6)}}{n} = \zeta(7) + \gamma\zeta(6) - \frac{9}{5}\zeta(5) + \frac{19}{20}\zeta(4) - \frac{19}{30}\zeta(3) + \frac{9}{120}\zeta(2) - \frac{1}{3}\,.$$

b) Pour les premières valeurs impaires de p, on obtient les relations suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^3} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(3)}}{n} = \zeta(4) + \gamma\zeta(3) + \frac{1}{2}\zeta(2) - 2\zeta'(3) + 2\nu_{-3}\,,$$
$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^5} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(5)}}{n} = \zeta(6) + \gamma\zeta(5) + \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{12}\zeta(3) + \frac{1}{12}\zeta(2) - 2\zeta'(5) + 2\nu_{-5}\,,$$
$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^7} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(7)}}{n} &= \zeta(8) + \gamma\zeta(7) + \frac{1}{6}\zeta(6) - \frac{1}{30}\zeta(5) + \frac{1}{60}\zeta(4) - \frac{1}{60}\zeta(3) + \frac{1}{30}\zeta(2)\\ &\quad - 2\zeta'(7) + 2\nu_{-7}\,.\end{aligned}$$

On remarquera, dans le cas impair, la symétrie des coefficients : $\delta_{k,p} = \delta_{p-k,p}$.

5 Intermède : calcul d'une somme

Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels avec $i \geq 1, j \geq 1$, on pose

$$Z(i,j) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i\,(n+1)^j}\,.$$

La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{1}{n^i\,(n+1)^j}$ permet, en sommant, d'obtenir les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&Z(1,1) = 1\,,\\
&Z(1,j) = j - \sum_{r=0}^{j-2} \zeta(j-r)\,, \qquad (j \geq 2)\\
&Z(i,1) = (-1)^{i-1} + \sum_{r=0}^{i-2} (-1)^r \zeta(i-r)\,, \qquad (i \geq 2)
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
Z(i,j) = (-1)^i \sum_{r=0}^{j-2} \binom{i+r-1}{i-1} \zeta(j-r) \\
+ \sum_{r=0}^{i-2} (-1)^r \binom{j+r-1}{j-1} \zeta(i-r) \\
+ (-1)^{i-1} \binom{i+j-1}{j-1}, \qquad (i \geq 2, j \geq 2)\,. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

6 Preuve de la Proposition 1

Pour tout entier $p \geq 2$, on a démontré (cf. [3, Théorème 10]) la relation

$$
\zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + K_p - \zeta_H(p) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k}\,. \qquad (15)
$$

Par ailleurs, on a également démontré (cf. [2, p. 103]) l'égalité

$$
K_p = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) + (-1)^p \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx\,. \qquad (16)
$$

En remplaçant K_p par cette expression dans (15), on obtient alors

$$
\begin{aligned}
\zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k} \\
- \zeta_H(p) + (-1)^p \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx\,. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

De plus, on a vu (cf. (10)) qu'on avait la relation

$$
\zeta_H(p) = \zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \int_1^\infty \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx\,.
$$

a) Dans le cas où p est un entier pair, on a $(-1)^p = 1$ dans (17), et il en résulte l'identité

$$
\zeta_{\mathrm{mod}}(p) + \zeta_H^{\mathcal{R}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k}\,. \qquad (18)
$$

L'identité (11) se déduit alors de (18) : en effet, la formule (14) donnée plus haut pour les $Z(i,j)$ permet d'exprimer la somme

$$\sigma_p := \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k}$$

comme une combinaison linéaire de valeurs de zêta (plus un terme constant). On peut calculer explicitement le coefficient de $\zeta(p-k)$ pour $k = 1, 2, \cdots p-2$ dans (18). En particulier, le coefficient de $\zeta(p-1)$ est égal à $-\frac{2p-3}{p-1}$. De plus, le terme constant dans (18) est (au signe près) le terme constant figurant dans la somme σ_p. Il est égal à

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k-1}\frac{1}{k}\binom{p-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{p-2}(-1)^{p-k}\frac{1}{k+1}\binom{p-1}{k} = \frac{1}{p}+\frac{(-1)^p}{p} = \frac{2}{p} \text{ pour } p \text{ pair.}$$

b) Dans le cas où p est un entier impair, on a $(-1)^p = -1$ dans (17) et on peut écrire

$$\zeta_{mod}(p) + \zeta_H^{\mathcal{R}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \sum_{k=1}^{p-2}(-1)^k\frac{\zeta(p-k)}{k} - \sum_{k=1}^{p-1}\frac{Z(p-k,k)}{k} - 2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx \quad (19)$$

Or, on a vu (cf. (16)) que

$$-\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\,dx = K_p - \sum_{k=1}^{p-2}\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(p-k)\,.$$

En remplaçant dans (19), on obtient alors

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{mod}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) - \sum_{k=1}^{p-2}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1}\frac{Z(p-k,k)}{k} + 2K_p\,.$$

Or, on a aussi (cf. (3)) la relation

$$K_p = -\zeta'(p) + \nu_{-p}\,.$$

Finalement, dans le cas impair, on obtient une formule qui est l'analogue de (18) :

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{mod}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) - \sum_{k=1}^{p-2}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1}\frac{Z(p-k,k)}{k} - 2\zeta'(p) + 2\nu_{-p} \quad (20)$$

d'où se déduit l'identité (12). On peut noter que, dans le cas impair, le terme constant dans la somme σ_p est nul.
c) Enfin, pour $p = 1$, on a

$$\zeta_{mod}(1) + \zeta_H^{\mathcal{R}}(1) = 2\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n}.$$

Or, d'après [2, Eq. (3.23) p. 105], on a l'égalité

$$2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1 \tag{21}$$

(une nouvelle preuve de cette formule est donnée en appendice). Le développement de ψ en série entière :

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)x^{n-1} \qquad (|x|<1)$$

permet d'identifier l'intégrale du membre de gauche avec la série ν_{-1} :

$$\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta(n)}{n-1} = \nu_{-1}.$$

La formule (13) en résulte. Ceci achève la preuve de la Proposition 1.

7 Extension de l'identité (4)

L'identité (4) admet la généralisation suivante qui est l'analogue, pour la sommation de Ramanujan, de la formule d'Euler ($\star\star$) pour la sommation ordinaire.

Proposition 2. Pour tout entier $p \geq 1$,

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^{2p}} = \zeta'(2p)+\nu_{-2p}+(p+1)\,\zeta(2p+1)+\sum_{k=1}^{2p-2}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(2p-k)-\sum_{k=1}^{p-1}\zeta(2p-k)\zeta(k+1)\,. \tag{22}$$

Démonstration. On utilise successivement les relations

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(2p) = \zeta_H(2p) - \int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^{2p}}\,dx\,,$$

$$-\int_1^{\infty}\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^{2p}}\,dx = \sum_{k=1}^{2p-2}\frac{(-1)^k}{k}\,\zeta(2p-k) - K_{2p}\,,$$

et

$$-K_{2p} = \zeta'(2p) + \nu_{-2p}\,.$$

L'identité (22) en résulte en remplaçant $\zeta_H(2p)$ par le second membre de ($\star\star$). $\square$

Exemple 2.

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^4} = \zeta'(4) + \nu_{-4} + 3\zeta(5) - \zeta(3) + \frac{1}{2}\zeta(2) - \zeta(3)\zeta(2)\,.$$

Remarque 1. On notera l'analogie formelle entre (22) et la formule "réciproque" donnée dans [5] :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2p}\, H_n = \zeta'(-2p) + \nu_{2p} + \frac{1-2p}{2}\zeta(1-2p) \qquad \text{pour } p \geq 1.$$

En particulier,

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^4\, H_n = \zeta'(-4) + \nu_4 - \frac{1}{80}\,.$$

Appendice

On donne ici une nouvelle preuve de la formule (21). La relation

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2(x+1)\,dx$$

(cf. [2, Eq. (2.6) p. 40]) est une conséquence directe de [2, Théorème 3]. Comme $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$, elle peut aussi s'écrire

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) + 2\frac{\psi(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1\,.$$

Or, d'après [4, p. 145], on a

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) - \frac{2\gamma}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1\,.$$

Par soustraction, on obtient

$$2\int_0^1 \left((\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1 - (2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1)\,.$$

Comme

$$(\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,,$$

on en déduit l'identité

$$2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1\,.$$

Références

[1] K. Boyadzhiev, A special constant and series with zeta values and harmonic numbers. Gazeta Matematica, Seria A, **115** (2018), 1–16.

[2] B. Candelpergher, Ramanujan Summation of Divergent Series, Lecture Notes in Math. 2185, Springer, 2017.

[3] B. Candelpergher, M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *Ramanujan J.* **27** (2012), 305–328.

[4] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Math., vol. 240, Springer, 2007.

[5] M-A. Coppo, A note on some alternating series involving zeta and multiple zeta values, *J. Math. Anal. App.* **475** (2019), 1831–1841.

[6] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, *J. Number Theory* **185** (2018), 160–193.

[7] P. T. Young, Global series for zeta functions, *The Fibonacci Quarterly* (2019), à paraître.