Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo, Bernard Candelpergher

Sur la sommation de Ramanujan des sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo et Bernard Candelpergher
Université Côte d'Azur, CNRS, LJAD (UMR 7351), Nice, France

Résumé. Dans cette étude, on applique le procédé de Ramanujan de sommation des séries à certaines sommes d'Euler linéaires. Ceci nous permet de donner une réinterprétation de certains résultats présentés dans des travaux antérieurs et d'en fournir un prolongement naturel.

Introduction

L'étude des sommes d'Euler a une assez longue histoire qui remonte au milieu du 18ème siècle. En réponse à une lettre de Goldbach datant de 1742, Euler a été amené à considérer, pour des entiers positifs p et r, des séries infinies de la forme

$$S_{r,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^p} \,,$$

où les $H_n^{(r)}$ sont les nombres harmoniques généralisés $\sum_{k=1}^{n} 1/k^r$ qui, pour $r = 1$, se réduisent aux nombres harmoniques classiques $H_n = H_n^{(1)}$. L'importance des nombres harmoniques provient du fait qu'ils apparaissent (parfois de manière assez inattendue) dans différentes branches de la théorie des nombres et de la combinatoire. Les séries $S_{r,p}$ sont appelées de nos jours les sommes d'Euler *linéaires*. Euler a découvert que pour tous les couples (r, p) vérifiant $r = 1$, ou $r = p$, ou $r + p$ impair, les sommes d'Euler linéaires pouvaient s'exprimer comme des combinaisons de valeurs de zêta (i.e. les valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} 1/n^s$ aux entiers positifs), un résultat remarquable qui, par la suite, sera retrouvé et complété par N. Nielsen[1].

1. Handbuch der Theorie der Gammafunction, Teubner, Leipzig, 1906.

Le procédé de Ramanujan de sommation des séries figure dans le chapitre VI de son second *Notebook*. Desservie par les ambiguités (observées par Hardy[2]) dans la définition de la “constante d’une série” qui rendaient son utilisation malaisée, la méthode de Ramanujan, basée sur la formule sommatoire d’Euler-MacLaurin, était quelque peu tombée dans l’oubli. Elle a connu un renouveau d’intérêt à la fin du 20ème siècle lorsqu’une définition claire et rigoureuse du procédé a été donnée en même temps que le lien avec la sommation usuelle a été complètement éclairci. Une synthèse exhaustive des définitions, principales propriétés, et domaine d’application de la sommation de Ramanujan est contenue dans [2], monographie qui développe en outre un formalisme algébrique adéquat permettant d’englober le procédé de Ramanujan et les autres méthodes classiques de sommation des séries dans un même cadre unificateur (cf. [2, Chapitre 5]).

Dans cette étude, on applique le procédé de sommation de Ramanujan à certaines sommes d’Euler linéaires. Cela nous permet de donner un prolongement naturel à plusieurs résultats déjà obtenus précédemment dans [2] et [3].

1 Préliminaires

On rappelle la belle identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) \tag{$\star$}$$

qui est un cas particulier d’une formule plus générale obtenue par Euler[3] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{2p}} = (p+1)\,\zeta(2p+1) - \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1) \tag{$\star\star$}$$

(pour une démonstration récente de la formule d’Euler, cf. [6, Corollaire 3.3]). Du point de vue de la sommation de Ramanujan, on a démontré l’identité suivante (cf. [2, Eq. (2.11), p. 45]) :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \zeta(3) + \gamma\zeta(2) - 1\,, \tag{1}$$

où le symbole $\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}}$ désigne la somme de la série au sens du procédé de Ramanujan (cf. [2]), et γ la constante d’Euler-Mascheroni. D’autre part, on a également montré (cf. [3, Théorème 10]) que

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - 1 + K_2 \tag{2}$$

2. Divergent Series, Clarendon press, Oxford, 1949, Chapitre XIII.

3. Meditationes circa singulare serierum genus (1775), E477. *Opera Omnia*, Series 1, vol. 15, pp. 217–264.

avec

$$K_p := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^p}\,.$$

En écrivant $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n)$, en développant le dernier terme en série entière puis en sommant, on obtient l'expression

$$K_p = -\zeta'(p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\zeta(k+p) = -\zeta'(p) - (-1)^p\,\nu_{-p}\,, \tag{3}$$

(cf. [1, Proposition 2]), où on a adopté la notation suivante (cf. [5]) :

$$\nu_k := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1-k}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+k} & \text{pour tout entier } k \leq -1 \\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n+k} & \text{pour tout entier } k \geq -1. \end{cases}$$

En particulier,

$$K_2 = -\zeta'(2) - \nu_{-2}\,.$$

Par soustraction de (1) et (2), on obtient alors

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2} \tag{4}$$

qui est l'analogue de la formule ($\star$) pour le procédé de sommation de Ramanujan. Rappelons qu'on a donné dans [5] une identité “réciproque” assez similaire :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^2 H_n = -\frac{1}{2}\zeta(-1) + \zeta'(-2) + \nu_2\,.$$

Dans la suite, on va donner différentes interprétations et généralisations des identités précédentes.

2 Interprétation de l'identité (1) avec les nombres de Cauchy

On considère les nombres rationnels β_n, appelés nombres de Cauchy (ou nombres de Bernoulli de seconde espèce)[4], qui sont définis par la fonction génératrice

$$\frac{z}{\ln(1+z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < 1\,.$$

4. La dénomination “nombres de Cauchy” a été introduite par Comtet et adoptée par de nombreux auteurs bien que le lien avec des travaux de Cauchy soit historiquement difficile à établir. Dans[4, Chapitre 9], les nombres β_n sont appelés “nombres de δ-Bernoulli”. Dans [5] et [7], une autre notation classique (introduite par Jordan) b_n à la place de $\beta_n/n!$ est utilisée.

Ils se calculent par récurrence ou s'obtiennent directement par la formule intégrale (cf. [3, Eq. (4.3), p. 121])

$$\beta_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)\,dx\,.$$

Les β_n alternent en signe de sorte que $|\beta_n| = (-1)^{n-1}\beta_n$. Dans la suite, on reprend la notation adoptée dans [3] en posant $\lambda_n := |\beta_n|$. On a ainsi pour les premières valeurs de n :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,, \lambda_2 = \frac{1}{6}\,, \lambda_3 = \frac{1}{4}\,, \lambda_4 = \frac{19}{30}\,, \lambda_5 = \frac{9}{4}\,, \lambda_6 = \frac{863}{84}\,, \dots$$

D'après [3, Définition 11 et Théorème 6] (voir aussi [2, Théorème 18]), on a les identités

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n}\,, \tag{5}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2}\,. \tag{6}$$

D'après [3, Exemple 8], on a aussi la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n} = 2\zeta(3) - 1\,.$$

Il en résulte les nouvelles identités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n^2} = \gamma\zeta(2) - \zeta(3) - \zeta'(2) - \nu_{-2} - 1 \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n^{(2)}}{n} = 2\zeta(3) + \zeta'(2) + \nu_{-2}\,, \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{(H_n)^2}{n} = -\zeta'(2) - \nu_{-2} - 1\,, \tag{9}$$

qui généralisent les identités bien connues (cf. [2, Eq. (4.24) et (4.30)], [3, Exemple 8], [7, Eq. (5.7) et (5.8)]) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{1}{n} = \gamma \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!}\frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1\,.$$

3 Interprétation fonctionnelle de l'identité (1)

Avant d'étendre la formule (1), on commence par en donner une interprétation fonctionnelle. Pour cela, on introduit la fonction zêta modifiée d'ordre 1 notée ici ζ_{mod}[5] qui est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$, par

$$\zeta_{\mathrm{mod}}(s) := \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(s)}}{n}$$

D'après [3, Théorèmes 6 et 11], on a

$$\zeta_{\mathrm{mod}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!\, n}\, \zeta_{1-n}(s,1)$$

avec (cf. [7, Eq. (2.3)])

$$\zeta_{-m}(s,a) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (a+j)^{-s}\,.$$

La fonction ζ_{mod} est une fonction entière (cf. [3, Théorème 7]). On considère également la fonction $\zeta_H^{\mathcal{R}}$ définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ par

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(s) := \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} H_n\, n^{-s}\,.$$

La fonction $\zeta_H^{\mathcal{R}}$ est une fonction entière (cf.[2, Théorème 9]), elle est reliée à la fonction zêta harmonique ζ_H[6] définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta_H(s) := \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, n^{-s}\,,$$

au travers de la relation (cf. [2, p. 72])

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(s) = \zeta_H(s) - \int_1^{\infty} x^{-s} \left(\psi(x+1) + \gamma\right) dx\,, \quad (\mathrm{Re}(s) > 1) \tag{10}$$

où ψ désigne la fonction digamma. La fonction ζ_H se prolonge en une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec un pôle double en $s = 1$ et des pôles simples en les

5. Dans [3], la fonction ζ_{mod} est notée F_1. On rappelle que la fonction zêta modifiée d'ordre 0 est la fonction $s \mapsto \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{-s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$.

6. Dans [2], la fonction ζ_H est notée h.

valeurs $s = 0$ et $s = 1-2k$ pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ (cf. [2, p. 72]). Avec ces notations, l'identité (1) peut alors se réécrire sous la forme équivalente :

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(2) + \zeta_{\mathrm{mod}}(2) = \zeta(3) + \gamma\zeta(2) - 1.$$

On notera également la relation

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(1) = \zeta_{\mathrm{mod}}(1) = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n!\, n^2} = -\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln(1-x)} + \frac{1}{x} \right) \ln x \, dx \, .$$

4 Extension de l'identité (1)

Comme on va le voir, l'équation (1) n'est en fait qu'un cas particulier d'une formule plus générale. Plus précisément, on va montrer la proposition suivante :

Proposition 1. Soit p un entier positif.

a) Si p est pair, on a

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) - \frac{2}{p} + \sum_{k=1}^{p-2} (-1)^k \alpha_{k,p}\, \zeta(p-k) \tag{11}$$

où, pour $k = 1, 2, \ldots, p-2$, les coefficients $\alpha_{k,p}$ sont des rationnels positifs.

b) Si p est impair (et $p \neq 1$), on a

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \frac{\zeta(p-1)}{p-1} - \sum_{k=2}^{p-2} (-1)^k \delta_{k,p}\, \zeta(p-k) - 2\zeta'(p) + 2\nu_{-p} \tag{12}$$

où, pour $k = 2, \ldots, p-2$, les coefficients $\delta_{k,p}$ sont des rationnels positifs.

c) Si $p = 1$, on a

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(1) + \zeta_{mod}(1) = -\zeta(2) + \gamma^2 + 2\gamma_1 + 2\nu_{-1}\, , \tag{13}$$

où γ_1 est la première constante de Stieltjes :

$$\gamma_1 = \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln j}{j} - \frac{1}{2}\ln^2 n \right\} .$$

Exemple 1. a) Pour les premières valeurs paires de p, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} = \zeta(3) + \gamma\zeta(2) - 1\,,\\
&\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^4} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(4)}}{n} = \zeta(5) + \gamma\zeta(4) - \frac{5}{3}\zeta(3) + \frac{5}{6}\zeta(2) - \frac{1}{2}\,,\\
&\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^6} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(6)}}{n} = \zeta(7) + \gamma\zeta(6) - \frac{9}{5}\zeta(5) + \frac{19}{20}\zeta(4) - \frac{19}{30}\zeta(3) + \frac{9}{120}\zeta(2) - \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

b) Pour les premières valeurs impaires de p, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^3} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(3)}}{n} = \zeta(4) + \gamma\zeta(3) + \frac{1}{2}\zeta(2) - 2\zeta'(3) + 2\nu_{-3}\,,\\
&\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^5} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(5)}}{n} = \zeta(6) + \gamma\zeta(5) + \frac{1}{4}\zeta(4) - \frac{1}{12}\zeta(3) + \frac{1}{12}\zeta(2) - 2\zeta'(5) + 2\nu_{-5}\,,\\
&\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^7} + \sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(7)}}{n} = \zeta(8) + \gamma\zeta(7) + \frac{1}{6}\zeta(6) - \frac{1}{30}\zeta(5) + \frac{1}{60}\zeta(4) - \frac{1}{60}\zeta(3) + \frac{1}{30}\zeta(2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\zeta'(7) + 2\nu_{-7}\,.
\end{aligned}$$

On remarquera, dans le cas impair, la symétrie des coefficients : $\delta_{k,p} = \delta_{p-k,p}$.

5 Intermède : calcul d'une somme

Pour tout couple (i,j) d'entiers naturels avec $i \geq 1, j \geq 1$, on pose

$$Z(i,j) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^i\,(n+1)^j}\,.$$

La décomposition de la fraction rationnelle $\frac{1}{n^i\,(n+1)^j}$ permet, en sommant, d'obtenir les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
&Z(1,1) = 1\,,\\
&Z(1,j) = j - \sum_{r=0}^{j-2} \zeta(j-r)\,, \qquad (j \geq 2)\\
&Z(i,1) = (-1)^{i-1} + \sum_{r=0}^{i-2} (-1)^r \zeta(i-r)\,, \qquad (i \geq 2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Z(i,j) = (-1)^i \sum_{r=0}^{j-2} \binom{i+r-1}{i-1} \zeta(j-r) \\ + \sum_{r=0}^{i-2} (-1)^r \binom{j+r-1}{j-1} \zeta(i-r) \\ + (-1)^{i-1} \binom{i+j-1}{j-1}, \qquad (i \geq 2, j \geq 2)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

6 Preuve de la Proposition 1

Pour tout entier $p \geq 2$, on a démontré (cf. [3, Théorème 10]) la relation

$$\zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + K_p - \zeta_H(p) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k}\,. \tag{15}$$

Par ailleurs, on a également démontré (cf. [2, p. 103]) l'égalité

$$K_p = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) + (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx\,. \tag{16}$$

En remplaçant K_p par cette expression dans (15), on obtient alors

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathrm{mod}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k} \\ - \zeta_H(p) + (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx\,. \end{aligned} \tag{17}$$

De plus, on a vu (cf. (10)) qu'on avait la relation

$$\zeta_H(p) = \zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx\,.$$

a) Dans le cas où p est un entier pair, on a $(-1)^p = 1$ dans (17), et il en résulte l'identité

$$\zeta_{\mathrm{mod}}(p) + \zeta_H^{\mathcal{R}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k}\,. \tag{18}$$

L'identité (11) se déduit alors de (18) : en effet, la formule (14) donnée plus haut pour les $Z(i,j)$ permet d'exprimer la somme

$$\sigma_p := \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k}$$

comme une combinaison linéaire de valeurs de zêta (plus un terme constant). On peut calculer explicitement le coefficient de $\zeta(p-k)$ pour $k = 1, 2, \cdots p-2$ dans (18). En particulier, le coefficient de $\zeta(p-1)$ est égal à $-\frac{2p-3}{p-1}$. De plus, le terme constant dans (18) est (au signe près) le terme constant figurant dans la somme σ_p. Il est égal à

$$\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k-1} \frac{1}{k} \binom{p-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^{p-k} \frac{1}{k+1} \binom{p-1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{(-1)^p}{p} = \frac{2}{p} \text{ pour } p \text{ pair.}$$

b) Dans le cas où p est un entier impair, on a $(-1)^p = -1$ dans (17) et on peut écrire

$$\zeta_{mod}(p) + \zeta_H^{\mathcal{R}}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) + \sum_{k=1}^{p-2} (-1)^k \frac{\zeta(p-k)}{k} - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k} - 2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx \quad (19)$$

Or, on a vu (cf. (16)) que

$$-\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x^p}\, dx = K_p - \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k)\,.$$

En remplaçant dans (19), on obtient alors

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{mod}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) - \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k} + 2K_p\,.$$

Or, on a aussi (cf. (3)) la relation

$$K_p = -\zeta'(p) + \nu_{-p}\,.$$

Finalement, dans le cas impair, on obtient une formule qui est l'analogue de (18) :

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(p) + \zeta_{mod}(p) = \zeta(p+1) + \gamma\zeta(p) - \sum_{k=1}^{p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(p-k) - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{Z(p-k,k)}{k} - 2\zeta'(p) + 2\nu_{-p} \quad (20)$$

d'où se déduit l'identité (12). On peut noter que, dans le cas impair, le terme constant dans la somme σ_p est nul.
c) Enfin, pour $p = 1$, on a

$$\zeta_{mod}(1) + \zeta_H^{\mathcal{R}}(1) = 2 \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n}.$$

Or, d'après [2, Eq. (3.23) p. 105], on a l'égalité

$$2 \int_0^1 \frac{\psi(x+1) + \gamma}{x} \, dx = 2 \sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} + \zeta(2) - \gamma^2 - 2\gamma_1 \tag{21}$$

(une nouvelle preuve de cette formule est donnée en appendice). Le développement de ψ en série entière :

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) x^{n-1} \qquad (|x| < 1)$$

permet d'identifier l'intégrale du membre de gauche avec la série ν_{-1} :

$$\int_0^1 \frac{\psi(x+1) + \gamma}{x} \, dx = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n-1} = \nu_{-1}.$$

La formule (13) en résulte. Ceci achève la preuve de la Proposition 1.

7 Extension de l'identité (4)

L'identité (4) admet la généralisation suivante qui est l'analogue, pour la sommation de Ramanujan, de la formule d'Euler ($\star\star$) pour la sommation ordinaire.

Proposition 2. Pour tout entier $p \geq 1$,

$$\sum_{n \geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^{2p}} = \zeta'(2p) + \nu_{-2p} + (p+1)\,\zeta(2p+1) + \sum_{k=1}^{2p-2} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(2p-k) - \sum_{k=1}^{p-1} \zeta(2p-k)\zeta(k+1)\,. \tag{22}$$

Démonstration. On utilise successivement les relations

$$\zeta_H^{\mathcal{R}}(2p) = \zeta_H(2p) - \int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1) + \gamma}{x^{2p}} \, dx\,,$$

$$-\int_1^{\infty} \frac{\psi(x+1) + \gamma}{x^{2p}} \, dx = \sum_{k=1}^{2p-2} \frac{(-1)^k}{k} \, \zeta(2p-k) - K_{2p}\,,$$

et

$$-K_{2p} = \zeta'(2p) + \nu_{-2p}\,.$$

L'identité (22) en résulte en remplaçant $\zeta_H(2p)$ par le second membre de ($\star\star$). $\square$

Exemple 2.

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^4} = \zeta'(4) + \nu_{-4} + 3\zeta(5) - \zeta(3) + \frac{1}{2}\zeta(2) - \zeta(3)\zeta(2)\,.$$

Remarque 1. On notera l'analogie formelle entre (22) et la formule "réciproque" donnée dans [5] :

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^{2p}\, H_n = \zeta'(-2p) + \nu_{2p} + \frac{1-2p}{2}\zeta(1-2p) \qquad \text{pour } p \geq 1.$$

En particulier,

$$\sum_{n\geqslant 1}^{\mathcal{R}} n^4\, H_n = \zeta'(-4) + \nu_4 - \frac{1}{80}\,.$$

Appendice

On donne ici une nouvelle preuve de la formule (21). La relation

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi^2(x+1)\,dx$$

(cf. [2, Eq. (2.6) p. 40]) est une conséquence directe de [2, Théorème 3]. Comme $\psi(x+1) = \psi(x) + 1/x$, elle peut aussi s'écrire

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) + 2\frac{\psi(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1\,.$$

Or, d'après [4, p. 145], on a

$$\int_0^1 \left(\psi^2(x) - \frac{2\gamma}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1\,.$$

Par soustraction, on obtient

$$2\int_0^1 \left((\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} - \gamma^2 - \zeta(2) + 1 - (2\gamma_1 - 2\zeta(2) + 1)\,.$$

Comme
$$(\psi(x)+\gamma)\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,,$$
on en déduit l'identité
$$2\int_0^1 \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x}\,dx = 2\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}\frac{H_n}{n}+\zeta(2)-\gamma^2-2\gamma_1\,.$$

Références

[1] K. Boyadzhiev, A special constant and series with zeta values and harmonic numbers. Gazeta Matematica, Seria A, **115** (2018), 1–16.

[2] B. Candelpergher, Ramanujan Summation of Divergent Series, Lecture Notes in Math. 2185, Springer, 2017.

[3] B. Candelpergher, M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *Ramanujan J.* **27** (2012), 305–328.

[4] H. Cohen, *Number Theory, Volume II: Analytic and Modern Tools*, Graduate Texts in Math., vol. 240, Springer, 2007.

[5] M-A. Coppo, A note on some alternating series involving zeta and multiple zeta values, *J. Math. Anal. App.* **475** (2019), 1831–1841.

[6] W. Wang, Y. Lyu, Euler sums and Stirling sums, *J. Number Theory* **185** (2018), 160–193.

[7] P. T. Young, Global series for zeta functions, *The Fibonacci Quarterly* (2019), à paraître.