HAL archives-ouvertes.fr

# Produit harmonique, sommation de Ramanujan et fonctions zêta d'Arakawa-Kaneko

Marc-Antoine Coppo

**To cite this version:**

Marc-Antoine Coppo. Produit harmonique, sommation de Ramanujan et fonctions zêta d'Arakawa-Kaneko. 2015. <hal-01202725v1>

**HAL Id: hal-01202725**
**https://hal.univ-cotedazur.fr/hal-01202725v1**

Submitted on 21 Sep 2015 (v1), last revised 20 Oct 2015 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Produit harmonique, sommation de Ramanujan et fonctions zêta d'Arakawa-Kaneko

**Marc-Antoine Coppo**

Laboratoire J-A. Dieudonné
UMR n° 7351 du CNRS
Parc Valrose
06108 Nice cedex 2
France
coppo@unice.fr

**Mémoire de Synthèse**

en vue de l'obtention d'une

**Habilitation à diriger des Recherches**

**2015**

# Sommaire

# Introduction

Ce mémoire s'articule autour des trois thèmes principaux auxquels j'ai consacré mes recherches au cours de ces 15 dernières années, thèmes qui sont assez étroitement reliés entre-eux comme je m'attacherai à le montrer. Il s'agit du *produit harmonique*, du *procédé de sommation de Ramanujan* et de la *fonction zêta d'Arakawa-Kaneko* qui ont fait l'objet des articles [1] à [9] de la liste de publications[1].

Les principales propriétés du produit harmonique dans l'espace des suites à valeurs complexes ont été exposées dans [2] et sont rappelées dans le chapitre I. Défini au moyen d'une transformation binomiale involutive notée $D$ (Définitions 5 et 8), ce produit admet aussi une expression explicite (Théorème 4). Les suites invariantes par l'opérateur $D$ sont joliment caractérisées à l'aide du produit harmonique, permettant une reformulation algébrique d'un critère d'invariance de Sun (Théorème 5). Le produit harmonique possède de remarquables propriétés vis-à-vis des sommes harmoniques ; il permet notamment de généraliser les nombres harmoniques de Roman et Rota (Théorème 7 et Exemple 12) et de donner une extension naturelle de la formule de Dilcher (Théorème 8 et Exemple 13).

Le produit harmonique réapparaît dans le chapitre II en relation avec la sommation de Ramanujan. Les propriétés fondamentales du procédé de sommation de Ramanujan ([B] Chapitre 6) ont été étudiées en détail dans [9] ; très récemment, elles ont été enrichies et réinterprétées par Candelpergher ([Ca]). Dans ce chapitre, on se place dans le cadre d'un espace de fonctions analytiques dans le demi-plan $\{\Re(x) > 0\}$ qui peuvent s'écrire comme des transformées de Laplace, cadre dans lequel le produit harmonique peut être construit au moyen du produit de convolution (Définition 19). Une utilisation combinée du produit harmonique et de la sommation de Ramanujan permet d'introduire d'une manière algébrique une intéressante famille de fonctions analytiques $F_k$ ($k = 0, 1, 2, \cdots$) de la variable complexe $s$ dont les valeurs spéciales sur les entiers positifs s'expriment comme des sommes infinies faisant intervenir les nombres de Bernoulli de seconde espèce et les polynômes de Bell modifiés évalués sur les nombres harmoniques (Théorème 18). Dans le cas où $k = 0$, $F_0(s)$ n'est autre que $\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1}$ où $\zeta(s)$ est la valeur en $s$ de la classique fonction zêta de Riemann. L'étude des propriétés de ces fonctions zêta modifiées a été initiée dans [3] puis récemment poursuivie par Young ([Y2] et [Y3]).

1. Les références numérotées [10] à [12] se rattachent à une autre branche des mathématiques et sont sans rapport avec le sujet de ce mémoire.

Le chapitre III est consacré aux valeurs spéciales de la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko. Originellement considérée par Arakawa et Kaneko en 1999 ([AK]), cette famille de fonctions analytiques $\xi_k$ ($k = 1, 2, \cdots$) de la variable complexe $s$ a été reconsidérée d'un point de vue plus général dans [4] par l'introduction d'une seconde variable $x$, en s'inspirant du modèle suivant lequel la fonction zêta d'Hurwitz englobe la fonction zêta de Riemann comme cas particulier (Définition 22). Dans le cas où $k = 1$, $\xi_1(s, x)$ n'est autre que $s\zeta(s+1, x)$. Sur les valeurs entières et négatives de $s$, $\xi_k(s, x)$ interpole les polynômes de poly-Bernoulli (Théorème 22), tandis que ses valeurs sur les entiers positifs s'expriment comme des sommes infinies faisant intervenir les polynômes de Bell modifiés évalués sur les nombres harmoniques généralisés (Théorème 20). Ces remarquables propriétés font de la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko $\xi_k(s, x)$ (ainsi que de sa variante "alternée" $\bar{\xi}_k(s, x)$) un puissant outil pour l'étude des sommes d'Euler [2] (cas où $x$ prend la valeur 1) et des sommes binomiales inverses [3] (cas où $x$ prend la valeur 1/2), comme l'ont montré les belles identités obtenues dans [1] (Exemples 21 et 24). Les valeurs spéciales de la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko sont des *périodes* au sens de Kontsevich et Zagier ([KZ]). Les sommes binomiales inverses intervenant dans le cadre de cette étude sont apparues pour la première fois dans la littérature scientifique il y a une vingtaine d'années en relation avec les diagrammes de Feynman ([DK]), mettant en exergue l'existence de profondes connexions entre certaines branches de la théorie des nombres et de la physique quantique ([Br]).

2. Introduites par Euler et Goldbach au milieu du 18ème siècle, les *sommes d'Euler* sont aussi appelées *valeurs zêta multiples* ou *nombres polyzêtas*.

3. Ces sommes binomiales inverses sont des cas particuliers de séries factorielles inverses considérées par Stirling dans son *Methodus Differentialis* (1730).

# Chapitre I
# Le produit harmonique dans l'espace des suites

Tous les résultats énoncés dans ce chapitre ont été démontrés dans [2]. On renvoie à cet article pour le détail des preuves.

## 1 Opérateurs dans l'espace des suites

On commence par introduire quelques opérateurs dans l'espace des suites à valeurs complexes qui jouent un rôle crucial dans la construction du produit harmonique ainsi que leurs images respectives dans l'espace isomorphe des séries formelles.

**Notation.** Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ des suites $a = (a(1), a(2), a(3), \dots, a(n), \cdots)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{E}^*$.

**Définition 1.** Si $\mathbb{C}[[z]]$ désigne l'espace des séries formelles, on a un isomorphisme naturel :

$$\Phi : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$$

défini par

$$\Phi(a)(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+1)\frac{z^n}{n!} = a(1) + a(2)z + a(3)\frac{z^2}{2} + a(4)\frac{z^3}{6} + \cdots$$

**Exemple 1.** a) La suite $\delta_m$ définie pour tout $m \geq 0$ et $n \geq 1$ par

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie la relation

$$\Phi(\delta_m)(z) = \frac{z^m}{m!}\,.$$

On a $\delta_0 := (1, 0, 0, \dots)$, $\delta_1 := (0, 1, 0, \dots)$, $\delta_2 := (0, 0, 1, 0, \dots)$, etc.

b) La suite $\mathbf{1} := (1, 1, 1, \dots)$ vérifie $\Phi(\mathbf{1})(z) = e^z$.

c) La suite $N := (1, 2, 3, \dots)$ vérifie $\Phi(N)(z) = (1+z)e^z$.

d) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la suite géométrique $\alpha^{N-1} := (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(\alpha^{N-1})(z) = e^{\alpha z}.$$

e) La *suite harmonique* $H_0 := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(H_0)(z) = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right) .$$

**Définition 2.** Les opérateurs sur $\mathcal{E}^*$ se transforment en opérateurs sur $\mathbb{C}[[z]]$ via l'isomorphisme $\Phi$. Plus précisément, si $U$ désigne un opérateur sur $\mathcal{E}^*$, il lui correspond l'opérateur $u$ sur $\mathbb{C}[[z]]$ défini par la relation

$$\Phi U = u\Phi \Leftrightarrow u = \Phi U \Phi^{-1}$$

que l'on appellera *l'image* de $U$. On a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^* & \xrightarrow{U} & \mathcal{E}^* \\ \uparrow \scriptstyle{\Phi^{-1}} & & \downarrow \scriptstyle{\Phi} \\ \mathbb{C}[[z]] & \xrightarrow{u} & \mathbb{C}[[z]] \end{array}$$

L'image de l'opérateur $I$ d'identité sur $\mathcal{E}^*$ sera notée Id.

## 1.1 Les opérateurs $L$ et $R$

**Définition 3.** L'opérateur $L$ de décalage à gauche (left) sur $\mathcal{E}^*$ est défini par

$$L(a)(n) = a(n+1),$$

c'est à dire :

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \overset{L}{\longmapsto} (a(2), a(3), a(4), \dots) .$$

L'image de $L$ est l'opérateur de dérivation formelle $\partial$ :

$$\Phi(L(a))(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+2)\frac{z^n}{n!} = a(2) + a(3)z + a(4)\frac{z^2}{2!} + \cdots = \partial\Phi(a)(z).$$

**Définition 4.** L'opérateur $R$ de décalage à droite (right) sur $\mathcal{E}^*$ est défini par

$$R(a)(n) = \begin{cases} a(n-1) & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

c'est à dire :

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \overset{R}{\longmapsto} (0, a(1), a(2), a(3), \dots) .$$

L'image de $R$ est l'opérateur d'intégration formelle $\int$ :

$$\Phi(R(a))(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+1)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = a(1)z + a(2)\frac{z^2}{2!} + \cdots = \int_0^z \Phi(a)(t)\, dt.$$

**Remarque 1.** Les opérateurs $L$ et $R$ ne sont pas inverses l'un de l'autre. On a la relation $LR = I$, mais on notera que l'opérateur $RL$ n'est pas l'identité :

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \xmapsto{RL} (0, a(2), a(3), a(4), \dots) \ .$$

## 1.2 Les opérateurs $D$ et $S$

**Définition 5.** Soit $V : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation défini par

$$V(a) = a(1).$$

L'image de $V$ est l'application $v : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $v(\Phi(a)) = \Phi(a)(0)$.

L'opérateur de différence $D : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$D(a)(n) = V\left((I - L)^{n-1}a\right) = v\left((\mathrm{Id} - \partial)^{n-1}\Phi(a)\right) \ ,$$

ce qui se traduit explicitement par

$$D(a)(n+1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} a(j+1) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On obtient ainsi pour de petites valeurs de $n$,

$$\begin{aligned} D(a)(1) &= a(1), \\ D(a)(2) &= a(1) - a(2), \\ D(a)(3) &= a(1) - 2a(2) + a(3), \end{aligned}$$

etc.

On a la relation :

$$\Phi(D(a))(z) = e^z \Phi(a)(-z) \, ,$$

ce qui signifie que l'image $d$ de l'opérateur $D$ vérifie pour tout $f \in \mathbb{C}[[z]]$,

$$d(f)(z) = e^z f(-z) \, .$$

**Théorème 1.** *L'opérateur $D$ est un automorphisme auto-inverse qui laisse la suite harmonique invariante ; autrement dit, pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a*

$$D(D(a)) = a$$

*et*

$$D(H_0) = H_0 \, .$$

**Exemple 2.** a) On a $D(\mathbf{1}) = \delta_0$ et $D(N) = \delta_0 - \delta_1$.
b) Soit $\alpha^{N-1}$ la suite géométrique de raison $\alpha \in \mathbb{C}$. On a $D(\alpha^{N-1}) = (1-\alpha)^{N-1}$.
En particulier la suite $(\dfrac{1}{2})^{N-1}$ est invariante par $D$.

**Définition 6.** L'opérateur de sommation $S : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$S(a)\,(n) = \sum_{j=1}^{n} a(j)\,.$$

L'opérateur $S$ est un automorphisme d'inverse $I - R$. L'image de $S$ est l'opérateur $s = \mathrm{Id} - d \int d$.

**Exemple 3.** 1) $S(\delta_0) = \mathbf{1}, S(\mathbf{1}) = N$.
2) $S(\alpha^{N-1}) = \dfrac{1}{1-\alpha}(\mathbf{1} - \alpha^N)$ pour $\alpha \neq 1$. En particulier,

$$S((-1)^{N-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (-1)^{N-1}) = (1, 0, 1, 0, \dots)\,.$$

**Théorème 2** (Relation entre les quatre opérateurs précédents)**.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} DL(a) &= (I - L)D(a), \\ DS(a) &= (I - R)D(a), \\ DR(a) &= (I - S)D(a)\,. \end{aligned}$$

**Exemple 4.** On rappelle que $H_0$ désigne la suite harmonique $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. Pour tout $m \geq 0$, on considère la suite $H_m$ définie par

$$H_m = S^m(H_0)\,.$$

Ce qui se traduit par :

$$H_{m+1}(n) = \sum_{j=1}^{n} H_m(j)\,.$$

En particulier, la suite $H_1$ est la suite des nombres harmoniques :

$$H_1(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,,$$

et pour $m \geq 2$, la suite $H_m$ est la suite des *nombres hyperharmoniques* ([CG]).

On considère la suite harmonique décalée $m$ fois à droite :

$$R^m(H_0) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{m}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots).$$

D'après la dernière des trois relations précédentes, on a

$$DR^m(H_0) = (I - S)^m(H_0) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} H_j \,.$$

En particulier,

$$DR(H_0) = H_0 - H_1 \,, \qquad \text{c'est à dire} \qquad D(H_1) = H_0 - R(H_0) \,,$$

ou d'une manière plus explicite :

$$D(H_1)(n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

# 2 Le produit harmonique des suites

On construit à présent le produit harmonique dans l'espace des suites au moyen de l'opérateur $D$ introduit précédemment.

## 2.1 L'algèbre $\mathcal{H} = (\mathcal{E}^*, \bowtie)$

**Définition 7.** Si $a$ et $b$ sont deux suites dans $\mathcal{E}^*$, on note $ab$ la suite définie par

$$(ab)(n) = a(n)b(n) \,.$$

On a en particulier : $\mathbf{1}\, a = a$ et $\delta_m\, a = a(m+1)\delta_m$ pour tout $m \geq 0$. Muni de ce produit, appelé *produit de Hadamard* des suites, l'espace $\mathcal{E}^*$ est une algèbre commutative, associative et unitaire notée $\mathcal{A}$. L'élément unité de $\mathcal{A}$ est la suite $\mathbf{1}$.

**Définition 8.** On définit le *produit harmonique* $a \bowtie b$ de deux suites $a$ et $b$ dans $\mathcal{E}^*$ par

$$a \bowtie b := D(D(a)D(b)) \,.$$

Comme $D = D^{-1}$, on déduit immédiatement de la définition précédente les deux relations fondamentales suivantes :

$$D(a \bowtie b) = D(a)D(b) \,,$$

et

$$D(ab) = D(a) \bowtie D(b) \,.$$

**Exemple 5.** 1) $\mathbf{1} \bowtie a = a(1)\mathbf{1}$, car

$$D(\mathbf{1} \bowtie a) = D(\mathbf{1})D(a) = \delta_0 D(a) = D(a)(1)\delta_0 = a(1)\delta_0 = a(1)D(\mathbf{1}).$$

2) $N \bowtie a = a(2)\mathbf{1} + (a(1) - a(2))N$, car

$$\begin{aligned} D(N)D(a) &= (\delta_0 - \delta_1)D(a) \\ &= D(a)(1)\delta_0 - D(a)(2)\delta_1 \\ &= a(1)D(N) + a(2)D(1-N). \end{aligned}$$

3) $\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1} = (\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1}$, car

$$\begin{aligned} D(\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1}) &= (1-\alpha)^{N-1}(1-\beta)^{N-1} \\ &= (1 - (\alpha + \beta - \alpha\beta))^{N-1} \\ &= D((\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1})\,. \end{aligned}$$

**Théorème 3.** *L'espace $(\mathcal{E}^*, \bowtie)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative, associative et unitaire notée $\mathcal{H}$, isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}$. L'élément unité dans $\mathcal{H}$ est la suite $\delta_0$.*

**Corollaire 1.** Une suite $a$ est inversible dans $\mathcal{H}$ si et seulement si la suite $D(a)$ est inversible dans $\mathcal{A}$ (i.e. $D(a)(n) \neq 0$ pour tout $n$). Dans ce cas, l'inverse harmonique de $a$ est donné par la formule

$$a^{\bowtie(-1)} = D\left(\frac{1}{D(a)}\right)\,.$$

**Exemple 6.** a)

$$(H_0)^{\bowtie(-1)} = D(N) = \delta_0 - \delta_1\,,$$

b)

$$\left(\alpha^{N-1}\right)^{\bowtie(-1)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^{N-1}\,.$$

**Remarque 2.** On notera que l'algèbre $\mathcal{H}$ contient des diviseurs de zéro. On a par exemple

$$\mathbf{1} \bowtie \delta_1 = 0\,.$$

## 2.2 Expression explicite du produit harmonique

On a l'expression suivante du produit harmonique :

**Théorème 4.** *Pour toutes suites $a$ et $b \in \mathcal{E}^*$ et tout entier $n \geq 0$,*

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} C_n^{i,j}\, a(i+1)b(j+1)$$

*où les nombres $C_n^{i,j}$ sont définis par l'identité*

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} C_n^{i,j}\, X^i Y^j\,.$$

**Remarque 3.** En développant $(X+Y-XY)^n$ par la formule du binôme et en identifiant le coefficient de $X^iY^j$, ceci peut encore s'écrire

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{0\le j\le i\le n} (-1)^{i-j}\binom{n}{i}\binom{i}{j} a(i+1)b(n+1-j) \quad (n\ge 0)\,.$$

**Exemple 7.** Pour de petites valeurs de $n$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&(a \bowtie b)(1) = a(1)b(1)\,,\\
&(a \bowtie b)(2) = a(2)b(1) + a(1)b(2) - a(2)b(2)\,,\\
&(a \bowtie b)(3) = a(3)b(1) + a(1)b(3) + 2a(2)b(2) - 2a(3)b(2) - 2a(2)b(3) + a(3)b(3)\,,
\end{aligned}$$

etc.

On rappelle que la suite géométrique de raison $1/2$ est invariante par $D$. Plus généralement, on donne la caractérisation suivante qui est une reformulation algébrique du critère de Sun ([Su]).

**Théorème 5** (Caractérisation des suites invariantes par $D$)**.** *Une suite $a \in \mathcal{E}^*$ est invariante par $D$ si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme*

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b$$

*où la suite $b \in \mathcal{E}^*$ est telle que $b(2k) = 0$ pour tout $k \ge 1$.*

**Exemple 8.** a) La suite harmonique peut s'écrire

$$H_0 = (\frac{1}{2})^{N-1} \bowtie b$$

avec $b = H_0 \bowtie (-1)^{N-1} = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots)$.

b) La suite

$$a = \frac{1}{2}(\delta_0 + \mathbf{1}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots)$$

est invariante par $D$. Elle peut s'écrire

$$a = (\frac{1}{2})^{N-1} \bowtie (1, 0, 1, 0, \cdots)\,.$$

## 2.3 Puissances harmoniques $k$-ièmes

**Définition 9.** Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier $k \geq 0$, la *puissance harmonique $k$-ième* de $a$ notée $a^{\bowtie k}$ par

$$a^{\bowtie 0} = \delta_0 \quad \text{et } a^{\bowtie (k+1)} = a^{\bowtie k} \bowtie a\,.$$

Par récurrence sur $k$, on en déduit immédiatement la formule suivante :

$$a^{\bowtie k} = D(\underbrace{D(a) \ldots D(a)}_{k}) = D\left((D(a))^k\right)\,.$$

En particulier, si $a$ est une suite invariante par $D$, alors on a

$$a^{\bowtie k} = D(a^k)\,.$$

**Exemple 9.** a)

$$N^{\bowtie k} = D((\delta_0 - \delta_1)^k) = \mathbf{1} + (-1)^k(1-N) = \begin{cases} N & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2-N & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

b)

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = \sum_{m=0}^{k} m!S(k,m)\delta_m\,,$$

où les $S(k,m)$ sont les nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$S(k,m) = \frac{1}{m!}\sum_{l=0}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}l^k.$$

c)

$$D(N^k) = (D(N))^{\bowtie k} = (\delta_0 - \delta_1)^{\bowtie k} = \sum_{0 \leq j \leq i \leq k}(-1)^i\binom{k}{i}j!S(i,j)\delta_j\,.$$

## 2.4 Propriété d'harmonicité

**Notation.** Pour $p$ entier naturel, on pose $(N)_0 = \mathbf{1}$, et pour $p \geq 1$

$$(N)_p = N(N+1)\cdots(N+p-1)\,.$$

**Théorème 6** (Propriété d'harmonicité)**.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et tout entier $p \geq 0$, on a la relation*

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a = \frac{p!}{(N)_{p+1}}S\left(\frac{(N)_p}{p!}\,a\right)\,,$$

*En particulier, pour $p = 0$, on en déduit l'important corollaire :*

$$H_0 \bowtie a = H_0 S(a)\,.$$

**Exemple 10.**

$$H_0 \bowtie H_0 = H_0 S(H_0) = H_0 H_1 = D\left((H_0)^2\right),$$
$$(H_0)^{\bowtie 3} = H_0 \bowtie (H_0 \bowtie H_0) = H_0 S(H_0 H_1) = D\left((H_0)^3\right).$$

**Exemple 11.** On a

$$\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a = \frac{1}{N(N+1)} S(Na)$$

c'est à dire

$$(\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k a(k) \quad (n \geq 1).$$

## 2.5 Les sommes harmoniques

On rappelle la remarquable propriété de la suite harmonique $H_0$ vis-à-vis du produit harmonique énoncée au paragraphe précédent :

$$H_0 \bowtie a = H_0 S(a) \text{ pour toute suite } a.$$

Plus généralement, on introduit à présent une notion de *somme harmonique* de la manière suivante :

**Définition 10.** Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier naturel $k$, la *somme harmonique $k$-ième* de $a$ notée $S^{(k)}(a)$ par la formule

$$(H_0)^{\bowtie k} \bowtie a = H_0 S^{(k)}(a).$$

**Théorème 7.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a $S^{(1)}(a) = S(a)$ et la relation de récurrence :*

$$S^{(k+1)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} S^{(k)}(a)(m) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

*Il en résulte que pour $k \geq 1$,*

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} a(n_k).$$

**Exemple 12.** Dans le cas où $a$ est la suite harmonique $H_0$, les nombres $S^{(k)}(a)(n)$ ne sont autres que les nombres harmoniques $c_n^{(k)}$ de Roman et Rota ([Ro]). Pour de petites valeurs de $k$, on retrouve ainsi :

$$
\begin{aligned}
S^{(1)}(H_0)(n) &= c_n^{(1)} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\,,\\
S^{(2)}(H_0)(n) &= c_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + \cdots + \frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\,,\\
S^{(3)}(H_0)(n) &= c_n^{(3)} = 1 + \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})\right] + \frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\right]\\
&\qquad + \cdots + \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})+\cdots+\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})\right].
\end{aligned}
$$

**Théorème 8** (Formule de Dilcher étendue)**.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, et pour $k \geq 1$, on a l'identité*

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m)\,.$$

*D'où*

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}\, a(n_k) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m).$$

**Exemple 13.** a) Si $a = H_0$, alors $D(a) = H_0$ et on retrouve la classique formule de Dilcher ([D]) :

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_k} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k}\,.$$

b) Si $a = (H_0)^2$, alors $D(a) = H_0 H_1$ où $H_1 = S(H_0)$ est la suite des nombres harmoniques ordinaires ($H_1(n) = \sum_{j=1}^{n} 1/j$), d'où

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1} n_k^2} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} H_1(m)\,.$$

c) Si $a = (H_0)^3$, alors $D(a) = H_0 S(H_0 H_1)$, d'où

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1} n_k^3} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} \sum_{j=1}^{m} \frac{H_1(j)}{j}\,.$$

d) Enfin, pour $a = (H_0)^4$, on montre que

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1} n_k^4} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{2m^k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(H_1(j))^2 + H^{(2)}(j)}{j}\,,$$

avec

$$H^{(2)}(n) = S\left((H_0)^2\right)(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\,.$$

## Chapitre II
# La sommation de Ramanujan

Tous les résultats énoncés dans ce chapitre ont été démontrés dans [3]. On renvoie à cet article pour le détail des preuves.

## 3 L'opérateur $D$ dans l'espace des fonctions

On commence par introduire un cadre analytique dans lequel l'opérateur de différence $D$ est étendu.

### 3.1 Transformation de Laplace-Borel

**Définition 11.** On considère l'espace vectoriel $E$ des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$ à valeurs complexes vérifiant la propriété suivante :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } C_\varepsilon > 0 \text{ tel que } |f(t)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon t} \text{ pour tout } t \in ]0, +\infty[ \,.$$

**Définition 12.** Soit $f$ une fonction dans l'espace $E$. La *transformée de Laplace* $\mathcal{L}(f)$ de $f$ est définie par

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \quad \text{pour } \Re(x) > 0\,.$$

**Notation.** Dans la suite, on note $\mathcal{E} = \mathcal{L}(E)$ l'image de $E$ par $\mathcal{L}$.

**Théorème 9.** *Si $a$ est une function dans $\mathcal{E}$, alors elle vérifie les propriétés suivantes :*

*a) $a$ est une fonction analytique dans le demi-plan $\{\, \Re(x) > 0 \,\}$,*

*b) $a(x) \to 0$ quand $\Re(x) \to +\infty$,*

*c) $\mathcal{L} : E \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme.*

**Définition 13.** Soit $a \in \mathcal{E}$. La *transformée de Borel* de $a$ est l'unique function $\widehat{a} \in E$ telle que $a = \mathcal{L}(\widehat{a})$. On a les formules réciproques :

$$\widehat{a}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} a(z)\, dz \quad \text{pour } c > 0 \text{ et } t > 0\,,$$

et

$$a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \widehat{a}(t)\, dt \qquad \text{pour } \Re(x) > 0\,.$$

**Définition 14.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions dans $E$. Le *produit de convolution* $f * g$ de $f$ et $g$ est la function definie pour tout $t > 0$ par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\, du\,.$$

**Théorème 10.** *Pour tout $f \in E$ et $g \in E$, alors $f * g \in E$ et*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\, \mathcal{L}(g)\,.$$

*Il en résulte que si $a \in \mathcal{E}$ et $b \in \mathcal{E}$ alors le produit $ab \in \mathcal{E}$ car $ab = \mathcal{L}(\widehat{a} * \widehat{b})$.*

## 3.2 L'opérateur $D$ et le difféomorphisme $\Lambda$

**Définition 15.** Soit $a$ une function de $\mathcal{E}$ alors l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{x-1}\widehat{a}(t)dt$$

converge pour tout $x$ vérifiant $\Re(x) > 0$. On appelle $D(a)$ la function definie pour tout $x$ tel que $\Re(x) > 0$ par

$$D(a)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{x-1}\widehat{a}(t)dt\,.$$

**Remarque 4.**

Les valeurs de $D(a)$ sur les entiers positifs peuvent être calculées directement sans recourir à $\widehat{a}$. Le développement de $(1-e^{-t})^n$ par la formule du binôme conduit à l'expression :

$$D(a)(n+1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} a(j+1) \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

Autrement dit, l'opérateur $D$ dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étend l'opérateur $D$ défini au Chapitre I dans l'espace $\mathcal{E}^*$ des suites.

**Notation.** On appelle $\Lambda$ le $C^1$-diffeomorphisme de $\mathbb{R}_+$ defini par

$$\Lambda(u) = -\log(1-e^{-u}).$$

En particulier, il est important de noter que $\Lambda$ est involutif :

$$\Lambda^{-1} = \Lambda\,.$$

**Théorème 11.** *Soit $a$ une function dans $\mathcal{E}$. Alors, la fonction $D(a) \in \mathcal{E}$ et , de plus, elle verifie la relation*

$$\widehat{D(a)} = \widehat{a}(\Lambda)\,,$$

*où $\widehat{a}(\Lambda)$ désigne $\widehat{a} \circ \Lambda$.*

**Exemple 14.** Soit $a(x) = \dfrac{1}{x^s}$ avec $\Re(s) \geq 1$. Alors $\widehat{a}(t) = \dfrac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$. Il en résulte, par le changement de variable $t = \Lambda(u)$, que

$$D(\frac{1}{x^s}) = \mathcal{L}\left(\frac{\Lambda^{s-1}}{\Gamma(s)}\right)\,,$$

**Remarque 5.** Le Théorème 11 peut être visualisé par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E} & \xrightarrow{D} & \mathcal{E} \\
\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1} & & \Big\uparrow \mathcal{L} \\
E & \xrightarrow{\Lambda^\star} & E
\end{array}$$

où $\Lambda^\star(\widehat{a}) = \widehat{a}(\Lambda)$. Les propriétés algébriques de $D$ sont résumées dans le théorème suivant qui est l'analogue du Théorème 1.

**Théorème 12.** *L'opérateur $D$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$ qui verifie $D = D^{-1}$ et laisse invariante la function $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.*

## 3.3 Sommation de Ramanujan

**Définition 16.** La suite des nombres de Bernoulli de seconde espèce $(b_n)$ ([J], [Y1]), encore appelés *coefficients de Gregory*[4], est définie par la fonction génératrice

$$\frac{z}{\log(1+z)} = \sum_{n\geq 0} b_n z^n\,.$$

Pour supprimer l'alternance des signes, on pose pour $n \geq 1$,

$$A_n = |b_n| = (-1)^{n-1} b_n\,.$$

**Exemple 15.** Les nombres $A_n$ sont des nombres rationnels qui peuvent se calculer au moyen de la relation de récurrence

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{n-k} = \frac{1}{n} \qquad \text{pour } n \geq 2.$$

4. Cette famille de nombres apparaît en effet pour la première fois dans une lettre de James Gregory datant de 1670.

ou par l'expression intégrale :

$$A_n = \frac{1}{n}\int_0^1 x(1-x)(1-\frac{x}{2})\cdots(1-\frac{x}{n-1})\,dx \quad \text{pour } n \geq 2.$$

On a ainsi pour de petites valeurs de $n$,

$$A_1 = \frac{1}{2}\,, A_2 = \frac{1}{12}\,, A_3 = \frac{1}{24}\,, A_4 = \frac{19}{720}\,, A_5 = \frac{3}{160} \text{ etc.}$$

**Théorème 13.** *Soit $a$ une fonction dans $\mathcal{E}$. La serie*

$$\sum_{n\geq 1} A_n \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\widehat{a}(t)\,dt$$

*converge et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\widehat{a}(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t})\,\widehat{a}(t)\,dt\,.$$

**Remarque 6.** Si $a \in \mathcal{E}$, alors la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ peut s'écrire

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\widehat{a}(t)\,dt\,,$$

et une permutation formelle de $\sum_{n\geq 1}$ et $\int_0^{+\infty}$ conduirait à écrire

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,\widehat{a}(t)\,dt.$$

Cependant, cette dernière intégrale peut diverger en 0. On peut la renormaliser en retirant la singularité en 0 et ceci peut être fait simplement en soustrayant la partie polaire $\frac{1}{t}$ de $\frac{1}{1-e^{-t}}$. Ceci conduit à la définition suivante :

**Définition 17.** Soit $a$ une function dans $\mathcal{E} = \mathcal{L}(E)$. La *somme de Ramanujan* de la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ est définie par

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t})\,\widehat{a}(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} A_n D(a)\,(n)\,.$$

**Exemple 16.** Soit $a(x) = \dfrac{1}{x^s}$ avec $\Re(s) \geq 1$. Alors, $a \in \mathcal{E}$ et $\widehat{a}(t) = \dfrac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$. Par conséquent

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^s} = \begin{cases} \gamma & \text{si } s = 1, \\ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} & \text{si } s \neq 1 \end{cases}$$

où $\zeta(s)$ est la valeur en $s$ de la fonction zêta de Riemann et où $\gamma$ désigne la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt\,.$$

**Remarque 7.** a) La définition de la somme de Ramanujan donnée ce chapitre coïncide avec celle donnée dans un cadre plus général dans [9] et [Ca] ; elle possède donc les mêmes propriétés fondamentales. En particulier, il résulte de la définition que l'application $a \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)$ est linéaire.

b) Soit $m$ un entier positif et $a \in \mathcal{E}$. La somme de Ramanujan de la série translatée $\sum_{n\geq 1} a(n+m)$ s'exprime par la formule :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+m) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-mt}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\widehat{a}(t)dt\,.$$

Cette somme ne vérifie cependant pas la propriété de décalage usuelle :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+m) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{j=1}^{m} a(j)$$

mais seulement la relation inhabituelle :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+m) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{j=1}^{m} a(j) + \int_1^{m+1} a(x)\,dx$$

Dans [Ca] Chapitre V est développé un formalisme algébrique adéquat qui explique pourquoi cette relation est "naturelle".

**Exemple 17.** Les constantes de Stieltjes $\gamma_k$ sont définies par le développement en série de Laurent de $\zeta$ :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\gamma_k(s-1)^k \quad (s \neq 1)\,.$$

On a l'expression ([2], [Ca]) :

$$\gamma_k = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln^k(n)}{n}\,.$$

En particulier,

$$\gamma_1 = -\gamma^2 - \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\ln t\,dt\,.$$

# 4 Le produit harmonique des fonctions

On donne à présent une construction du produit harmonique dans ce cadre analytique au moyen du produit de convolution.

## 4.1 Le $\Lambda$-produit de convolution

**Définition 18.** Si $a$ et $b$ sont deux fonctions dans $\mathcal{E}$, alors le $\Lambda$-*produit de convolution* $\widehat{a} \circledast \widehat{b}$ de $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ est défini par

$$\widehat{a} \circledast \widehat{b} = \Lambda^\star(\Lambda^\star(\widehat{a}) * \Lambda^\star(\widehat{b}))\,,$$

ou de manière équivalente (puisque $\Lambda^\star = (\Lambda^\star)^{-1}$) par

$$(\widehat{a} \circledast \widehat{b})(\Lambda) = \widehat{a}(\Lambda) * \widehat{b}(\Lambda)\,.$$

Le $\Lambda$-produit de convolution hérite des propriétés algébriques du produit de convolution ordinaire : il est bilinéaire, commutatif et associatif.

**Définition 19.** Soient $a$ et $b$ deux fonctions dans $\mathcal{E}$. Le *produit harmonique* $a \bowtie b$ de $a$ et $b$ est défini par

$$a \bowtie b = \mathcal{L}(\widehat{a} \circledast \widehat{b}) \in \mathcal{E}\,.$$

Cette construction peut être synthétisée dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
(a,b) & \longrightarrow & (\widehat{a},\widehat{b}) & \longrightarrow & (\widehat{a}(\Lambda),\widehat{b}(\Lambda)) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
a \bowtie b & \longleftarrow & \widehat{a} \circledast \widehat{b} & \longleftarrow & \widehat{a}(\Lambda) * \widehat{b}(\Lambda)
\end{array}$$

Le produit harmonique dans $\mathcal{E}$ hérite des propriétés de bilinéarité, de commutativité et d'associativité du $\Lambda$-produit de convolution.

**Théorème 14.** *Si $a$ et $b$ sont deux fonctions dans $\mathcal{E}$ alors on a les relations fondamentales*

$$D(a \bowtie b) = D(a)\,D(b)\,,$$

*et*

$$D(ab) = D(a) \bowtie D(b)\,.$$

Du point de vue de la sommation de Ramanujan, les deux relations précédentes s'interprètent de la façon suivante :

**Corollaire 2.** Soient $a$ et $b$ dans $\mathcal{E}$, on a les identités :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}(a \bowtie b)(n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n D(a)(n)\, D(b)(n)\,.$$

et

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}}(ab)(n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (D(a) \bowtie D(b))(n)\,.$$

**Remarque 8.** Les valeurs du produit $a \bowtie b$ sur les entiers positifs peuvent être évaluées sans recourir à $\widehat{a}$ ni à $\widehat{b}$. Par des transformations élémentaires, on peut en effet montrer que

$$(a \bowtie b)(n+1) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(e^{-t-s})(e^{-t}+e^{-s}-e^{-t}e^{-s})^n \widehat{a}(t)\widehat{b}(s)dtds\,.$$

Par conséquent, si les nombres $C_n^{i,j}$ sont définis par

$$(X+Y-XY)^n = \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} C_n^{i,j}\, X^i Y^j\,,$$

on a l'expression explicite

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} C_n^{i,j}\, a(i+1)b(j+1)\,,$$

Autrement dit, le produit harmonique dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étend naturellement le produit harmonique défini au Chapitre I dans l'espace $\mathcal{E}^*$ des suites.

## 4.2 Propriété d'harmonicité

On énonce à présent une propriété d'harmonicité dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions analogue à celle déjà vue dans l'espace des suites (cf. Théorème 6).

**Théorème 15.** *Soit $a \in \mathcal{E}$. Alors*

$$\frac{1}{x} \bowtie a = \frac{S(a)(x)}{x}\,,$$

*où $S(a)$ désigne la fonction définie pour $\Re(x) > 0$ par*

$$S(a)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}(1-e^{-xt})\widehat{a}(t)dt\,.$$

**Remarque 9.** L'opérateur $S$ étend l'opérateur de sommation introduit au Chapitre I. Pour tout entier $n \geq 1$, on a en effet

$$S(a)(n) = \sum_{j=1}^{n} a(j)\,.$$

**Exemple 18.**

$$\frac{1}{x} \bowtie \frac{1}{x} = \mathcal{L}(\Lambda) = \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x},$$

où $\psi$ désigne la fonction digamma (dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma$).

## 4.3 La fonction zêta modifiée

**Définition 20.** Pour tout entier $k \geq 1$, on considère la puissance harmonique $k$-ième de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ notée (abusivement) $\dfrac{1}{x}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\bowtie k} = \underbrace{\frac{1}{x} \bowtie \frac{1}{x} \bowtie \ldots \bowtie \frac{1}{x}}_{k} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)\,,$$

Pour tout entier $k \geq 0$ et $\Re(s) \geq 1$, on définit la *fonction zêta modifiée* d'ordre $k$ par la formule suivante :

$$F_k(s) = \begin{cases} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^s} & \text{si } k = 0, \\ \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\bowtie k} \bowtie \frac{1}{x^s}\right)(n) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

**Théorème 16.** *Pour tout entier $k \geq 0$,*

$$F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^k} D\left(\frac{1}{x^s}\right)(n) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} f_k(1-e^{-t})\, t^{s-1}\, dt$$

*avec*

$$f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{z^n}{n^k}\,.$$

*En particulier,*

$$F_0(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}\,.$$

**Théorème 17.** *La fonction $F_k$ se prolonge analytiquement dans $\mathbb{C}$ en une fonction entière. Les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta modifiée sont données par :*

$$F_k(-n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{A_{m+1}}{(m+1)^k} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (j+1)^n\,. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

En particulier, pour $k=0$, on déduit la relation

$$\frac{1-B_{n+1}}{n+1}=\sum_{m=0}^{n}A_{m+1}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(j+1)^n$$

où les $B_n$ sont les nombres de Bernoulli ([AIK]).

**Définition 21** (Polynômes de Bell modifiés)**.** La suite des polynômes de Bell modifiés $(P_n)$ est définie par la fonction génératrice

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\frac{z^k}{k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x_1,\cdots,x_n)\,z^n$$

ou par la relation de récurrence équivalente :

$$P_0=1,\quad nP_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}x_j\,P_{n-j}(x_1,\ldots,x_{n-j})\quad(n\geq 1)\,,$$

ou bien encore par la représentation explicite :

$$P_n(x_1,...,x_n)=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}\frac{1}{k_1!k_2!\ldots k_n!}\left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1}\left(\frac{x_2}{2}\right)^{k_2}\ldots\left(\frac{x_n}{n}\right)^{k_n}$$

Pour de petites valeurs de $n$, on obtient ainsi les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
&P_0=1\,,\\
&P_1(x_1)=x_1\,,\\
&P_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2\,,\\
&P_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{6}x_1^3+\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{3}x_3\,,\\
&P_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{24}x_1^4+\frac{1}{4}x_1^2x_2+\frac{1}{8}x_2^2+\frac{1}{3}x_1x_3+\frac{1}{4}x_4\,.
\end{aligned}$$

**Théorème 18** (valeurs spéciales de $F_k$ sur les entiers positifs)**.** *Pour tout entier $m\geq 0$, on a*

$$F_k(m+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n^{k+1}}P_m(H_n^{(1)},H_n^{(2)},\ldots,H_n^{(m)})\,,$$

*où $A_n$ désigne le $n$-ième nombre de Bernoulli de seconde espèce non-alterné, $P_m$ est le $m$-ième polynôme de Bell modifié et $H_n^{(m)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^m}$.*

**Remarque 10.** Avec les notations du Chapitre I, on a en particulier l'identité $H_n^{(1)} = H_1(n)$.

**Corollaire 3.** Pour $m \geq 1$,

$$F_0(m+1) = \zeta(m+1) - \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{P_m(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})}{n} ,$$

**Corollaire 4** (formule de dualité)**.** Pour tout entier $k \geq 0$,

$$F_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^{k+1}} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{P_k(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(k)})}{n} .$$

**Exemple 19.**

$$\begin{aligned}
F_0(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} = \gamma \,, \\
F_0(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n H_n^{(1)}}{n} = \zeta(2) - 1 \,, \\
F_0(3) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n (H_n^{(1)})^2}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n H_n^{(2)}}{n} = \zeta(3) - \frac{1}{2} \,, \\
F_1(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(1)}}{n} .
\end{aligned}$$

Les valeurs spéciales de la fonction $F_1$ sur les entiers positifs admettent une expression particulière :

**Théorème 19.** *Pour tout entier $q \geq 2$,*

$$F_1(q) = \gamma\zeta(q) + \zeta(q+1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^q} - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k n^{q-k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n^q} .$$

**Exemple 20.**

$$\begin{aligned}
F_1(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n H_n^{(1)}}{n^2} = \gamma \frac{\pi^2}{6} - \zeta(3) - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log{(n+1)}}{n^2} \,, \\
F_1(3) &= \gamma\zeta(3) - \frac{\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log{(n+1)}}{n^3} \,, \\
F_1(4) &= \gamma \frac{\pi^4}{90} - 2\zeta(5) + \frac{\pi^2}{6}\zeta(3) - \frac{2}{3}\zeta(3) + \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log{(n+1)}}{n^4} .
\end{aligned}$$

## Chapitre III

# La fonction zêta d'Arakawa-Kaneko

Tous les résultats énoncés dans ce chapitre ont été démontrés dans [1] et [4]. On renvoie à ces deux articles pour le détail des preuves. On commence par introduire la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko générale $\xi_k(s,x)$ puis sa variante alternée $\bar{\xi}_k(s,x)$. On s'intéresse tout particulièrement à leurs valeurs spéciales sur les entiers qui sont des *périodes* au sens de Kontsevich et Zagier ([KZ]).

**Définition 22.** Pour tout entier $k \geq 1$, la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko $\xi_k(s,x)$ est définie pour $\Re(s) > 0$ et $\Re(x) > 0$ par la transformée de Mellin normalisée

$$\xi_k(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} t^{s-1}\, dt$$

avec

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}\,.$$

On pose

$$\xi_k(s) = \xi_k(s,1) \quad \text{et} \quad \alpha_k(s) = 2^{-s}\xi_k(s, \frac{1}{2})\,.$$

Pour $k=1$, il existe une relation simple entre les valeurs des fonctions $\zeta$, $\xi_k$ et $\alpha_k$ :

$$\xi_1(s) = s\,\zeta(s+1) \quad \text{et} \quad \alpha_1(s) = (2-2^{-s})s\zeta(s+1)\,.$$

**Remarque 11** (Lien avec l'opérateur $D$ et le produit harmonique)**.** Pour $\Re(s) \geq 1$, on peut donner au moyen de l'opérateur $D$ et du produit harmonique une définition plus algébrique de la fonction $\xi_k$ d'Arakawa-Kaneko comme suit :

$$\begin{aligned} \xi_k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} D\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\bowtie k} \bowtie \frac{1}{x^s}\right)(n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} D\left(\frac{1}{x^s}\right)(n) \end{aligned}$$

où $\dfrac{1}{x^s}$ désigne la fonction $x \mapsto x^{-s}$ .

# 5 Valeurs spéciales de $\xi_k$

## 5.1 Valeurs sur les entier positifs

**Théorème 20** (valeurs aux entiers positifs)**.** *Pour tout entier* $m \geq 0$ *et* $\Re(x) > 0$*,*

$$\xi_k(m+1,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^k x(x+1)\dots(x+n)} P_m(h_n^{(1)}(x),\dots,h_n^{(m)}(x))$$

*où* $P_m(x_1,\dots,x_m)$ *désigne le* $m$*-ième polynôme de Bell modifié évalué sur les nombres harmoniques généralisés*

$$h_n^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+x)^m} \,.$$

En spécialisant cette relation en $x = 1$ et $x = 1/2$, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 5.** Pour tout entier $m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\xi_k(m+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \, P_m(H_n^{(1)},\dots,H_n^{(m)}) \,, \\
\alpha_k(m+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n} n^{k+1}} \, P_m(O_n^{(1)},\dots,O_n^{(m)}) \,,
\end{aligned}$$

avec

$$O_n^{(m)} = 2^{-m} h_{n-1}^{(m)}(1/2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)^m} \,,$$

et

$$H_n^{(m)} = h_{n-1}^{(m)}(1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m} \,.$$

**Corollaire 6.** Pour $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\xi_k(1) = \zeta(k+1) \,, \\
&\xi_k(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}}{n^{k+1}} = \frac{1}{2}(k+3)\zeta(k+2) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k} \zeta(j)\zeta(k+2-j) \,.
\end{aligned}$$

**Corollaire 7.** Pour tout entier $m \geq 0$,

$$(m+1)\zeta(m+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_m(H_n^{(1)}, \ldots, H_n^{(m)}) ,$$
$$(2 - 2^{-m-1})(m+1)\zeta(m+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n} n^2} P_m(O_n^{(1)}, \ldots, O_n^{(m)}) .$$

**Corollaire 8** (formule d'Ohno)**.** Pour tout entier $k \geq 2$,

$$\sum_{m=0}^{k-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n^{(1)}, \ldots, H_n^{(m)}) = (2 - 2^{2-k})(k-1)\zeta(k) .$$

**Théorème 21.** *Pour tout entier* $k \geq 1$*,*

$$2\alpha_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^{k+1}} = 2^{k-1} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{(\ln 2)^{k-j}}{(j-1)!(k-j)!} L_j ,$$

*avec*

$$L_k = -Ls_{k+1}^{(1)}(\pi) := \int_0^{\pi} u \ln^{k-1}\left(2 \sin \frac{u}{2}\right) du .$$

**Exemple 21.**

$$\xi_1(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}}{n^2} = 2\zeta(3) ,$$
$$\alpha_1(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(1)}}{n^2} = \frac{7}{2}\zeta(3) ,$$
$$\xi_2(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}}{n^3} = \frac{5}{4}\zeta(4) = \frac{\pi^4}{72} ,$$
$$\alpha_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^2}{2} \ln 2 - \frac{7}{4}\zeta(3)$$
$$\alpha_2(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(1)}}{n^3} = 7\zeta(3) \ln 2 - \frac{\pi^4}{32} - 8G(1) ,$$
$$\alpha_3(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{2}(\ln 2)^2 - \frac{7}{2}\zeta(3) \ln 2 + \frac{\pi^4}{96} + 4G(1)$$

où $\quad G(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{O_n^{(1)}}{(2n)^3} \quad$ désigne la constante de Ramanujan ([B], [Si]).

## 5.2 Polynômes de Poly-Bernoulli

**Théorème 22** (valeurs aux entiers négatifs)**.** *Pour tout entier $k \geq 1$ et pour $\Re(x) > 0$, la fonction $s \mapsto \xi_k(s,x)$ se prolonge analytiquement dans $\mathbb{C}$ en une fonction entière. Les valeurs aux entiers négatifs de la fonction d'Arakawa-Kaneko sont données par :*

$$\xi_k(-n,x) = (-1)^n B_n^{(k)}(x) \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

*où les $B_n^{(k)}(x)$ sont les polynômes de poly-Bernoulli définis par la fonction génératrice :*

$$e^{-xt}\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\,.$$

**Remarque 12.** Les polynômes $B_n^{(k)}(x)$ sont des polynômes de degré $n$ en $x$. Pour $k = 1$, on retrouve (au signe près) les polynômes de Bernoulli classiques ([J], [AIK]).

$$B_n^{(1)}(x) = (-1)^n B_n(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}B_j x^{n-j}$$

où les $B_j$ sont les nombres de Bernoulli.

**Exemple 22.** On a l'expression explicite

$$B_n^{(k)}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(m+1)^k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(x+j)^n\,.$$

Pour de petites valeurs de $k$ et $n$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\xi_2(-1,x) &= -B_1^{(2)}(x) = x - \frac{1}{4}\,,\\
\xi_2(-2,x) &= B_2^{(2)}(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{36}\,,\\
\xi_2(-3,x) &= -B_3^{(2)}(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{24}\,,\\
\xi_3(-1,x) &= -B_1^{(3)}(x) = x - \frac{1}{8}\,,\\
\xi_3(-2,x) &= B_2^{(3)}(x) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{11}{216}\,,\\
\xi_3(-3,x) &= -B_3^{(3)}(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{11}{72}x + \frac{1}{288}\,.
\end{aligned}$$

## 5.3 La fonction $\xi_k$ alternée

**Définition 23.** On considère la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko alternée $\bar{\xi}_k(s,x)$ définie pour $\Re(s) > 0$, $\Re(x) > 0$ et $k \geq 0$ par :

$$\bar{\xi}_k(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \operatorname{Li}_k(\frac{1-e^{-t}}{2})\, t^{s-1}\, dt$$

On pose

$$\eta_k(s) = \bar{\xi}_k(s,1) \quad \text{et} \quad \beta_k(s) = 2^{-s}\bar{\xi}_k(s,\frac{1}{2})\,.$$

En particulier, pour $k=0$, on a ,

$$\eta_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1-2^{1-s})\zeta(s) \quad \text{et} \quad \beta_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^s} = \beta(s)$$

où $\beta$ désigne la fonction bêta de Dirichlet ([RZ]).

**Théorème 23.** *Pour tout entier $m \geq 0$,*

$$\eta_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n^{k+1}}\, P_m(H_n^{(1)}, \ldots, H_n^{(m)}) \quad (k \geq 0)\,,$$
$$\beta_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n}\, n^{k+1}}\, P_m(O_n^{(1)}, \ldots, O_n^{(m)}) \quad (k \geq 0)\,.$$

**Exemple 23.** Comme $\beta_0(s) = \beta(s)$, on a pour tout entier $m \geq 1$,

$$2\beta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}\, n}\, P_{2m-1}(O_n^{(1)}, \ldots, O_n^{(2m-1)})\,.$$

On en déduit l'expression suivante de la constante de Catalan $G = \beta(2)$ :

$$2G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(1)}}{n}\,,\ \text{et celle de la constante } \beta(4) :$$
$$12\beta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{(O_n^{(1)})^3}{n} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(1)} O_n^{(2)}}{n} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(3)}}{n}\,.$$

**Théorème 24.** *Pour tout entier $m \geq 1$,*

$$\eta_1(m) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{H_n^{(m)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}\, P_{m-1}(H_n^{(1)}, \ldots, H_n^{(m-1)})\,,$$
$$\beta_1(m) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{O_n^{(m)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^2}\, P_{m-1}(O_n^{(1)}, \ldots, O_n^{(m-1)})\,.$$

**Exemple 24.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{O_n^{(1)}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{16}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{O_n^{(2)}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n}}\frac{O_n^{(1)}}{n^2}=\frac{7}{4}\zeta(3)-\frac{\pi}{2}G\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{O_n^{(3)}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{\binom{2n}{n}}\frac{(O_n^{(1)})^2}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{\binom{2n}{n}}\frac{O_n^{(2)}}{(2n)^2}=\frac{\pi^4}{64}-G^2$$

où $G$ désigne la constante de Catalan.

**Remarque 13.** Pour les valeurs de $\eta_1$, on a :

$$\eta_1(1)=\mathrm{Li}_2(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H_n^{(1)}}{n}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}(\ln 2)^2\,,$$

et pour $m\geq 2$,

$$\begin{aligned}\eta_1(m)&=\frac{1}{2}m\zeta(m+1)-(1-2^{1-m})\zeta(m)\ln 2\\&\quad-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1}(1-2^{1-j})(1-2^{j-m})\zeta(j)\zeta(m+1-j)\,.\end{aligned}$$

En particulier ([B], [CS]), on a l'identité :

$$\eta_1(2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H_n^{(2)}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)}}{2^n n^2}=\zeta(3)-\frac{\pi^2}{12}\ln 2\,.$$

**Théorème 25.** *Pour tout entier $k\geq 1$,*

$$2\beta_k(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^{k+1}}=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{2^{j-1}(\ln 2)^{k-j}}{(j-1)!(k-j)!}\bar{L}_j$$

*avec*

$$\bar{L}_k=-Ls_{k+1}^{(1)}(\frac{\pi}{2}):=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\ln^{k-1}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)\,du\,.$$

**Exemple 25.**

$$\eta_2(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\,n^3}=\mathrm{Li}_3(\frac{1}{2})=\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{\pi^2}{12}\ln 2+\frac{1}{6}(\ln 2)^3\,,$$

$$2\beta_2(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^2}{8}\ln 2+\pi G-\frac{35}{16}\zeta(3)\,.$$

# Références

[A] V. Adamchik, On Stirling numbers and Euler sums, *J. Comput. Appl. Math.*, **79** (1997), 119-130.

[AIK] T. Arakawa, T. Ibukiyama, et M. Kaneko, *Bernoulli numbers and zeta functions*, Springer Verlag, Tokyo, 2014.

[AK] T. Arakawa et M. Kaneko, Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 189-209.

[B] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part I*, Springer Verlag, New York, 1985.

[BH] A. Bayad et Y. Hamahata, Arakawa-Kaneko $L$-functions and generalized poly-Bernoulli polynomials, *J. Number Theory*, **131** (2011), 1020-1036.

[Br] D. Broadhurst, *Multiple zeta values and modular forms in quantum field theory*, in Schneider et Blümlein (eds.), Computer algebra in quantum field theory, Springer Verlag, 33-73, 2013.

[Ca] B. Candelpergher, *Ramanujan summation of divergent series*, HAL-01150208 (2015), à paraître.

[C] P. Cartier, Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents, *Séminaire Bourbaki*, 2000-2001, exp. n° 885, 137-173.

[Co] L. Comtet, *Advanced combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.

[CG] J. Conway et R. Guy, *The Book of Numbers*, Springer Verlag, New York, 1976.

[CS] J. Choi et H. M. Srivastava, Explicit evaluation of Euler and related sums, *Ramanujan J.* **10** (2005), 51-70.

[D] K. Dilcher, Some $q$-series identities related to divisors functions, *Discrete Math.* **145** (1995), 83-93.

[DK] A. Davydychev et M. Kalmykov, Massive Feynman diagrams and inverse binomial sums, *Nuclear Physics*, **B 699** (2004), 3-64.

[J] C. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York, 1965.

[KZ] M. Kontsevich et D. Zagier, *Periods*, in Engquist (ed.) et al., Mathematics unlimited - 2001 and beyond, Springer Verlag, 771-808, 2001.

[L] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North-Holland, New York, 1981.

[O] Y. Ohno, *Sum relations for multiple zeta values*, in Aoki (ed.) et al., Zeta functions, topology, and quantum physics, Dev. Math. **14**, 131-144, Springer Verlag, New York, 2005.

[RZ] T. Rivoal et W. Zudilin, Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant, *Math. Ann.* **326** (2003), 705-721.

[Ro] G.-C. Rota, Formal power series of logarithmic type, *Advances in Math.* **75** (1989), 1-118.

[Sa] Y. Sasaki, On generalized poly-Bernoulli numbers and related $L$-functions, *J. Number Theory*, **132** (2012), 156-170.

[Si] R. Sitaramachandrarao, A formula of S. Ramanujan, *J. Number Theory*, **25** (1987), 1-19.

[Su] Z.-H. Sun, Invariant sequences under binomial transformation, *Fibonacci Quart. 39* (2001), 324-333.

[Y1] P. T. Young, A 2-adic formula for Bernoulli numbers of the second kind and for the Nörlund numbers, *J. Number Theory*, **128** (2008), 2951-2962.

[Y2] P. T. Young, Symmetries of Bernoulli polynomial series and Arakawa- Kaneko zeta functions, *J. Number Theory*, **143** (2014), 142-161.

[Y3] P. T. Young, The $p$-adic Arakawa-Kaneko zeta functions, *J. Number Theory*, **155** (2015), 13-35.

[Z] D. Zagier, The Mellin transform and other useful analytic techniques, Appendix to E. Zeidler, *Quantum Field Theory I : Basics in Mathematics and Physics* Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2006), 305-323.

[Zu] I. J. Zucker, On the series $\sum \binom{2k}{k}^{-1} k^{-n}$ and related sums, *J. Number Theory*, **20** (1985), 92-102.

# Publications


[1] M-A. Coppo et B. Candelpergher, Inverse binomial series and values of Arakawa-Kaneko zeta functions, *Journal of Number Theory* **150** (2015), 98-119.

[2] B. Candelpergher et M-A. Coppo, Le produit harmonique des suites, *L'Enseignement mathématique*, **59** (2013), 39-72.

[3] B. Candelpergher et M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *The Ramanujan Journal* **27** (2012), 305-328.

[4] M-A. Coppo et B. Candelpergher, The Arakawa-Kaneko zeta function, *The Ramanujan Journal*, **22** (2010), 153-162.

[5] M-A. Coppo, Nouvelles expressions des formules de Hasse et de Hermite pour la fonction zêta d'Hurwitz, *Expositiones Mathematicae* **27** (2009), 79-86.

[6] M-A. Coppo, Une histoire des séries infinies, *La Gazette des Mathématiciens*, **120** (2009), 39-52.

[7] M-A. Coppo, Sur les sommes d'Euler divergentes, *Expositiones Mathematicae*, **18** (2000), 297-308.

[8] M-A. Coppo, Nouvelles expressions des constantes de Stieltjes, *Expositiones Mathematicae*, **17** (1999), 349-358.

[9] B. Candelpergher, M-A. Coppo, et E. Delabaere, La sommation de Ramanujan, *L'Enseignement Mathématique*, **43** (1997), 93-132.

[10] M-A. Coppo et C. Walter, Composante centrale du lieu de Brill-Noether du schéma de Hilbert, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **200**, 341-349, Dekker, New York, 1996

[11] M-A. Coppo, Une généralisation d'un théorème de Cayley, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Série I : Mathématiques, **314** (1992), 613-616.

[12] M-A. Coppo, Familles maximales de systèmes de points surabondants, *Mathematische Annalen*, **291** (1991), 725-735.