Une étude asymptotique probabiliste des coefficients d'une série entière

Bernard Candelpergher, Michel Miniconi

Une étude asymptotique probabiliste des coefficients d'une série entière

Bernard Candelpergher, Michel Miniconi
Laboratoire J.-A. Dieudonné, UMR 7351
Université Nice Sophia Antipolis, 06108 Nice Cedex 02, France
candel@unice.fr, miniconi@unice.fr

(23 juillet 2012)

Résumé. En suivant les idées de Rosenbloom [7] et Hayman [5] nous utilisons une démarche probabiliste pour étudier le comportement asymptotique des coefficients d'une série entière. Dans ce cadre nous énonçons un théorème de convergence vers une loi normale. Nous appliquons ensuite la méthode de Luis Báez-Duarte [1] à l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier en entiers distincts.

1 Introduction

Notation.
On désigne par $\mathcal{O}_+(D(0,R))$ l'ensemble des fonctions f analytiques dans le disque ouvert $D(0,R)$, où $R \in]0,+\infty]$, telles que $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ avec a_n réels positifs non tous nuls. En particulier on a $f(t) > 0$ pour tout $t \in]0,R[$.

Définition.
Soit $f \in \mathcal{O}_+(D(0,R))$: pour tout $t \in]0,R[$ on définit la mesure discrète sur $\mathbb{R}$

$$\mu_t(f) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n t^n}{f(t)} \delta_n$$

On associe à cette mesure une variable aléatoire X_t définie sur l'espace probabilisé $\Omega =]0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que

$$P(X_t = n) = \frac{a_n t^n}{f(t)},$$

le but étant de démontrer des résultats sur le comportement asymptotique des a_n en utilisant des méthodes probabilistes (*voir* Rosenbloom [7] qui attribue cette idée à Khinchin).

Moments et fonction caractéristique.
Les séries $\sum_{n\geq 0} n^k a_n t^n$ étant aussi convergentes dans le disque $D(0,R)$, on en déduit que X_t possède un moment d'ordre k pour tout $k \geq 1$. En particulier pour $k = 1$ on a, pour tout $t \in]0,R[$:

$$E(X_t) = \sum_{n\geq 0} n \frac{a_n t^n}{f(t)} = t \frac{f'(t)}{f(t)}$$

On pose $m(t) = E(X_t)$, $0 < t < R$; la fonction m est continue sur $]0,R[$.
La fonction caractéristique φ_{X_t} (ou $\varphi_{\mu_t(f)}$) de X_t est donnée par

$$\varphi_{X_t}(\theta) = E(e^{i\theta X_t}) = \sum_{n\geq 0} e^{in\theta} \frac{a_n t^n}{f(t)} = \frac{f(te^{i\theta})}{f(t)}$$

Les coefficients du développement de Taylor de f sont liés à la fonction caractéristique φ_{X_t} par

$$a_n = \frac{f(t)}{2\pi t^n} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{X_t}(\theta) e^{-in\theta} d\theta \tag{1.1}$$

pour tout $t \in]0,R[$.

Normalisation.
Soit $\sigma(t) = \sqrt{Var(X_t)}$ et considérons la variable aléatoire centrée réduite

$$Z_t = \frac{X_t - m(t)}{\sigma(t)}.$$

On a

$$\varphi_{Z_t}(x) = e^{-ix\frac{m(t)}{\sigma(t)}}\varphi_{X_t}\big(\frac{x}{\sigma(t)}\big)$$

donc en posant $\theta = \dfrac{x}{\sigma(t)}$ dans la formule (1.1) donnant a_n, on obtient pour tout $t \in]0, R[$

$$a_n = \frac{f(t)}{2\pi\sigma(t)t^n}\int_{-\pi\sigma(t)}^{\pi\sigma(t)} \varphi_{Z_t}(x)e^{i\frac{x}{\sigma(t)}(m(t)-n)}dx.$$

Supposons qu'il existe une suite $t_n \to R$ telle que

$$m(t_n) = n \text{ pour tout } n$$

alors on a

$$a_n = \frac{f(t_n)}{2\pi\sigma(t_n)(t_n)^n}\int_{-\pi\sigma(t_n)}^{\pi\sigma(t_n)} \varphi_{Z_{t_n}}(x)dx$$

Comportement asymptotique des a_n lorsque $n \to +\infty$
On suppose que la fonction m est continue, strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers R. Soit (t_n) une suite dans $]0, R[$ tendant vers R et telle que

$$m(t_n) = n \quad \text{pour tout } n$$

et

$$\sigma(t_n) \to +\infty.$$

On a alors

$$a_n = \frac{f(t_n)}{2\pi\sigma(t_n)(t_n)^n}\int_{-\pi\sigma(t_n)}^{\pi\sigma(t_n)} \varphi_{Z_{t_n}}(x)dx.$$

Supposons en outre que l'on ait la convergence en loi de Z_t vers une variable aléatoire Z quand $t \to R$, ce qui veut dire que

$$\varphi_{Z_t}(x) \to \varphi_Z(x)$$

pour tout x, alors on peut espérer un résultat du type (*voir* Hayman [5])

$$a_n \backsim \frac{f(t_n)}{2\pi\sigma(t_n)(t_n)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_Z(x)dx.$$

Pour que la formule ci-dessus donne un équivalent sous une forme forme analytique simple, il faudrait pouvoir résoudre explicitement l'équation

$$m(t_n) = n.$$

Quand ceci n'est pas possible, la stratégie consiste alors à utiliser un équivalent de la fonction $t \mapsto m(t)$ lorsque $t \to 1$.
Soient m_1 et σ_1 des équivalents de m et σ respectivement lorsque $t \to 1$:

$$\begin{aligned} m(t) &\sim m_1(t) \\ \sigma(t) &\sim \sigma_1(t). \end{aligned}$$

Soit alors (τ_n) une suite dans $]0,1[$ tendant vers 1 et telle que pour tout n

$$m_1(\tau_n) = n.$$

Posons $Z_t^1 = \dfrac{X_t - m_1(t)}{\sigma_1(t)}$. On a comme précédemment

$$a_n = \frac{f(\tau_n)}{2\pi\sigma_1(\tau_n)\tau_n^n} \int_{-\sigma_1(\tau_n)\pi}^{\sigma_1(\tau_n)\pi} E(e^{ixZ^1_{\tau_n}})dx.$$

La justification de ce remplacement par des équivalents nécessite une condition de *convergence forte* (*voir* Báez-Duarte [1]) :

$$\int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} \left|\varphi_{Z_{\tau_n}}(x) - e^{-x^2/2}\right| dx \to 0.$$

On applique la méthode que l'on vient de décrire à la fonction

$$f(z) = \sum q(n) z^n$$

où $q(n)$ est le nombre de partitions restreintes de n, c'est-à-dire le nombre des décompositions

$$n = n_1 + \cdots + n_p$$

en entiers strictement positifs *différents les uns des autres* afin d'obtenir la formule asymptotique des partitions restreintes :

$$q(n) \sim \frac{1}{4} \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{3}}}}{3^{1/4} n^{3/4}}$$

(*voir* par exemple Erdös [4] ou Ingham [6]).

2 Variable associée à un produit infini

On suppose désormais $R = 1$.

2.1 Mesure associée à un produit

Lemme 2.1 Soient f_1 et f_2 deux fonctions dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$, alors le produit $f_1 f_2$ est dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ et

$$\mu_t(f_1 f_2) = \mu_t(f_1) * \mu_t(f_2)$$

Plus généralement, soient $f_1, f_2, \ldots$ des fonctions dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$, alors le produit $f_1 ... f_n$ est dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$:

$$\mu_t(f_1 ... f_n) = \mu_t(f_1) * \cdots * \mu_t(f_n)$$

Démonstration

Soient $f_1(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ et $f_2(t) = \sum_{n\geq 0} b_n t^n$, on a

$$f_1(t)f_2(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \sum_{n\geq 0} b_n t^n = \sum_{n\geq 0} \sum_{k+l=n} a_k b_l t^n$$

donc

$$\mu_t(f_1 f_2) = \sum_{n\geq 0} \frac{\sum_{k+l=n} a_k b_l t^n}{f_1(t) f_2(t)} \delta_n = \sum_{n\geq 0} \sum_{k+l=n} \frac{a_k t^k b_l t^l}{f_1(t) f_2(t)} \delta_k * \delta_l = \mu_t(f_1) * \mu_t(f_2)$$

Par récurrence on a $\mu_t(f_1 ... f_n) = \mu_t(f_1) * \cdots * \mu_t(f_n)$.

□

Théorème 2.2 Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ telle que le produit infini $\prod_{k\geq 1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$. Alors la fonction $f = \prod_{k\geq 1}^{+\infty} f_k$ est dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ et la suite des mesures $\mu_t(f_1...f_n) = \mu_t(f_1) * \cdots * \mu_t(f_n)$ converge en loi vers la mesure $\mu_t(f)$ lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration. Comme le produit infini $\prod_{k\geq 1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$ on en déduit que la fonction $f = \prod_{k\geq 1}^{+\infty} f_k$ est analytique dans $D(0,1)$.
En outre on a

$$f(z) = \prod_{k\geq 1}^{+\infty} f_k(z) = \prod_{k\geq 1}^{+\infty} \sum_{n\geq 0} a_{n,k} z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{n_1+...+n_p=n} a_{n_1,1}...a_{n_p,p}$$

donc $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec

$$a_n = \sum_{n_1+...+n_p=n} a_{n_1,1}...a_{n_p,p}$$

ce qui prouve que $f \in \mathcal{O}_+(D(0,1))$.
D'autre part, la fonction caractéristique de $\mu_t(f_1...f_n) = \mu_t(f_1) * \cdots * \mu_t(f_n)$ est égale au produit des fonctions caractéristiques de chacune des lois

$$\varphi_{\mu_t(f_1)*\cdots*\mu_t(f_n)}(x) = \frac{f_1(te^{ix})}{f_1(t)} \cdots \frac{f_n(te^{ix})}{f_n(t)}$$

Comme le produit $f_1(z)...f_n(z)$ tend vers $f(z)$ pour tout z dans $D(0,1)$, on a pour tout $t \in]0,1[$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_1(te^{ix})}{f_1(t)} \cdots \frac{f_n(te^{ix})}{f_n(t)} = \frac{f(te^{ix})}{f(t)}$$

La suite des fonctions caractéristiques des mesures $\mu_t(f_1...f_n)$ converge donc simplement vers la fonction caractéristique de la mesure $\mu_t(f)$ associée à f.
□

2.2 La série des variables aléatoires associées

Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ telle que le produit infini $f = \prod_{k\geq 1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$.
Par un théorème classique, à la suite des mesures de probabilité $(\mu_t(f_n))$ on peut associer une probabilité sur l'espace produit $\Omega =]0,1[^{\mathbb{N}}$ et une suite de variables aléatoires $(X_{n,t})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ *indépendantes* telle que pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire $X_{n,t}$ ait pour loi $\mu_t(f_n)$.
On peut alors affirmer que pour tout $n \geq 1$, la mesure $\mu_t(f_1...f_n)$ est la loi de la somme $X_{1,t} + ... + X_{n,t}$.
La convergence de la suite de mesures $\mu_t(f_1...f_n)$ se traduit donc par la convergence en loi de la série $\sum_{n\geq 1} X_{n,t}$. La loi de $\sum_{n\geq 1} X_{n,t}$ n'est autre que $\mu_t(f)$.

La série

$$\sum_{n\geq 1} \sigma^2(X_{n,t}) = \sum_{n\geq 1} Var(X_{n,t} - E(X_{n,t}))$$

est convergente et d'après le théorème de Kolmogorov, la série $\sum_{n\geq 1}(X_{n,t} - E(X_{n,t}))$ converge presque sûrement sur Ω. Si l'on suppose que la série $\sum_{n\geq 1} E(X_{n,t})$ converge alors la série $\sum_{n\geq 1} X_{n,t}$ converge presque sûrement.
Les $X_{n,t}$ étant positives et indépendantes, on en déduit par le théorème de Beppo-Levi que

$$Var(\sum_{n\geq 1} X_{n,t}) = \sum_{n\geq 1} Var(X_{n,t}).$$

Ceci justifie la définition suivante :

Définition.
Soit (f_n) une suite de fonctions dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ telle que le produit infini $f = \prod_{k\geq 1}^{+\infty} f_k$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$. Soit une suite de variables aléatoires $(X_{n,t})$ telle que pour tout $t \in]0,1[$ les $X_{n,t}$ sont indépendantes et pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire $X_{n,t}$ a pour loi $\mu_t(f_n)$.
Si les séries $\sum_{n\geq 1} E(X_{n,t})$ et $\sum_{n\geq 1} Var(X_{n,t})$ sont convergentes, alors la série $\sum_{n\geq 1} X_{n,t}$ converge presque sûrement et définit une variable aléatoire X_t de loi $\mu_t(f)$.
On a de plus

$$m(t) = E(X_t) = \sum_{n\geq 1} E(X_{n,t}) \quad \textbf{et} \quad \sigma(t) = \Big(Var(X_t)\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{n\geq 1} Var(X_{n,t})\Big)^{1/2}.$$

2.3 Application à l'étude des coefficients

On se donne une suite de fonctions $f_n = \sum_{n\geq 0} a_{k,n} z^k$ dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ telle que le produit infini $\prod_{n\geq 1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$. La fonction $f = \prod_{n\geq 1}^{+\infty} f_n$ est dans $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ et l'on peut écrire $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec

$$a_n = \sum_{n_1+\ldots+n_p=n} a_{n_1,1}\ldots a_{n_p,p}$$

Si les séries $\sum_{n\geq 1} E(X_{n,t})$ et $\sum_{n\geq 1} \sigma(X_{n,t})$ sont convergentes, considérons la variable aléatoire centrée réduite

$$Z_t = \frac{\sum_{n\geq 1} X_{n,t} - m(t)}{\sigma(t)}$$

Supposons que Z_t converge en loi vers une variable aléatoire Z de loi N(0,1) et soit (t_n) une suite tendant vers 1 telle que

$$m(t_n) = n \text{ pour tout } n.$$

On a alors

$$\sum_{n_1+\ldots+n_p=n} a_{n_1,1}\ldots a_{n_p,p} = \frac{f(t_n)}{2\pi\sigma(t_n)(t_n)^n} \int_{-\pi\sigma(t_n)}^{\pi\sigma(t_n)} \varphi_{Z_{t_n}}(x)dx$$

Si

$$\sigma(t_n) \to +\infty \text{ quand } t_n \to 1$$

il est plausible que

$$\lim_{t_n\to 1} \int_{-\sigma(t_n)\pi}^{\sigma(t_n)\pi} \varphi_{t_n}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim \varphi_{t_n}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$$

et on en déduirait ainsi *la formule asymptotique des coefficients*

$$\sum_{n_1+\ldots+n_p=n} a_{n_1,1}\ldots a_{n_p,p} \sim \frac{f(t_n)}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_n)(t_n)^n}. \tag{2.1}$$

Passage par des équivalents.

Afin d'établir la formule (2.1) ci-dessus avec σ_1 à la place de σ (et τ_n à la place de t_n), il reste à montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\sigma_1(\tau_n)\pi}^{\sigma_1(\tau_n)\pi} E(e^{ixZ^1_{\tau_n}})dx = \sqrt{2\pi}.$$

On remarque que l'on peut écrire

$$Z^1_t = \frac{X_t - m_1(t)}{\sigma_1(t)} = Z_t\frac{\sigma(t)}{\sigma_1(t)} + \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t) = \frac{m(t)-m_1(t)}{\sigma_1(t)}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{-\sigma_1(\tau_n)\pi}^{\sigma_1(\tau_n)\pi} E(e^{ixZ^1_{\tau_n}})dx &= \int_{-\sigma_1(\tau_n)\pi}^{\sigma_1(\tau_n)\pi} E(e^{ix\frac{\sigma(\tau_n)}{\sigma_1(\tau_n)}Z_{\tau_n}})e^{ix\varepsilon(\tau_n)}dx \\ &= \frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} \varphi_{Z_{\tau_n}}(x)e^{ix\frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\varepsilon(\tau_n)}dx\end{aligned}$$

Pour justifier le remplacement par des équivalents, nous énonçons deux hypothèses :

Hypothèse 1. Supposons que

$$\frac{m(\tau_n) - m_1(\tau_n)}{\sigma_1(\tau_n)} = \varepsilon(\tau_n) \to 0 \text{ quand } \tau_n \to 1.$$

Hypothèse 2. Supposons que

$$\int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} \left|\varphi_{Z_{\tau_n}}(x) - e^{-x^2/2}\right| dx \to 0.$$

Sous ces deux hypothèses il est facile de montrer que la suite $\int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} \varphi_{Z_{\tau_n}}(x)e^{ix\frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\varepsilon(\tau_n)}dx$ converge vers $\sqrt{2\pi}$.

En effet, on a

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} \varphi_{Z_{\tau_n}}(x)e^{ix\frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\varepsilon(\tau_n)}dx - \int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} e^{ix\frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\varepsilon(\tau_n)}e^{-x^2/2}dx\right| \\ \leq\ &\int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} \left|\varphi_{Z_{\tau_n}}(x) - e^{-x^2/2}\right| dx,\end{aligned}$$

il suffit donc de montrer que

$$\lim_{\tau_n\to 1}\int_{-\sigma(\tau_n)\pi}^{\sigma(\tau_n)\pi} e^{ix\frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\varepsilon(\tau_n)}e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Ceci résulte du théorème de la convergence dominée, car on a

$$\lim_{\tau_n\to 1} e^{ix\frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\varepsilon(\tau_n)}e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}$$

et

$$\left|e^{ix\frac{\sigma_1(\tau_n)}{\sigma(\tau_n)}\varepsilon(\tau_n)}e^{-x^2/2}\right| \leq e^{-x^2/2}.$$

Résumons ce qui précède dans le théorème suivant :

Théorème 2.3 (Théorème des équivalents) Soit $(f_n = \sum_{n\geq 0} a_{k,n} z^k)$ **une suite de fonctions dans** $\mathcal{O}_+(D(0,1))$ **telle que le produit infini** $\prod_{n\geq 1}^{+\infty} f_n$ **converge uniformément sur tout compact de** $D(0,1)$**. La fonction** $f = \prod_{n\geq 1}^{+\infty} f_n$ **est donc analytique dans** $D(0,1)$ **et** $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ **avec**

$$a_n = \sum_{n_1+...+n_p=n} a_{n_1,1}...a_{n_p,p}$$

Si les séries $\sum_{n\geq 1} E(X_{n,t})$ **et** $\sum_{n\geq 1} \sigma(X_{n,t})$ **sont convergentes, considérons la variable aléatoire centrée réduite**

$$Z_t = \frac{\sum_{n\geq 1} X_{n,t} - m(t)}{\sigma(t)}$$

Supposons que Z_t **converge en loi vers une variable aléatoire** Z **de loi N(0,1) avec** ***la condition de convergence forte***

$$\lim_{t\to 1} \int_{-\sigma(t)\pi}^{\sigma(t)\pi} \left|\varphi_{Z_t}(x) - e^{-x^2/2}\right| dx = 0 \qquad (2.2)$$

Soient m_1 **et** σ_1 **des équivalents de** m **et** σ **respectivement lorsque** $t \to 1$ **:**

$$\begin{aligned} m(t) &\sim m_1(t) \\ \sigma(t) &\sim \sigma_1(t) \end{aligned}$$

Soit une suite (τ_n) **dans** $]0,1[$ **convergeant vers 1 et telle que pour tout** n **on ait :**

$$m_1(\tau_n) = n$$

avec

$$\frac{m(\tau_n) - m_1(\tau_n)}{\sigma_1(\tau_n)} \to 0 \textbf{ quand } \tau_n \to 1.$$

Alors

$$a_n \sim \frac{f(\tau_n)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(\tau_n)\tau_n^n}. \qquad (2.3)$$

3 Un théorème de convergence

Théorème 3.1 (Théorème de convergence) Soit une suite de variables aléatoires positives $(X_{n,t})$ **dans** $L^3(\Omega)$**, telle que pour tout** $t \in]0,1[$ **:**

a) **les** $X_{n,t}$ **sont indépendantes**

b) **les séries** $\sum_{n\geq 1} E(X_{n,t})$**,** $\sum_{n\geq 1} Var(X_{n,t})$ **et** $\Gamma_3(t) = \sum_{n\geq 1} E(|X_{n,t} - E(X_{n,t})|^3)$ **sont convergentes**

c) **la fonction** $t \mapsto \dfrac{\Gamma_3(t)}{(\sigma(t))^3}$ **tend vers** 0 **quand** $t \to 1$

d) $\mathbf{lim}_{t\to 1}\mathbf{sup}_{n\geq 1} \dfrac{Var(X_{n,t})}{\sigma^2(t)} = 0$

Alors la série $X_t = \sum_{n\geq 1} X_{n,t}$ **est convergente presque sûrement et la fonction caractéristique** φ_{Z_t} **de la variable aléatoire**

$$Z_t = \frac{X_t - m(t)}{\sigma(t)}$$

est telle que

$$\varphi_{Z_t}(x) \to e^{-x^2/2} \quad \textbf{quand} \quad t \to 1.$$

Démonstration.

Posons $Y_{n,t} = X_{n,t} - E(X_{n,t})$ on a $Z_t = \dfrac{\sum_{n\geq 1} Y_{n,t}}{\sigma(t)}$.

Par l'indépendance des $Y_{n,t}$ on voit que la variable aléatoire Z_t a pour fonction caractéristique

$$\varphi_{Z_t}(\theta) = E(e^{i\theta \sum \frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}}) = \prod_{n\geq 1} E(e^{i\theta \frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}})$$

On a $E(Y_{n,t}) = 0$ et $E(Y_{n,t}^2) = \sigma_{n,t}^2 = Var(X_{n,t})$.

Lemme 3.2 Sous les hypothèses du théorème (3.1) ci-dessus, on a

$$E\big(e^{i\theta \frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}}\big) = 1 - \frac{\theta^2}{2}\big(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\big)^2 + L_n(\theta, t)$$

avec

$$|L_n(\theta,t)| \leq \frac{|\theta|^3}{6(\sigma(t))^3} E(|Y_{n,t}|^3).$$

Ce lemme résulte de la formule de Taylor

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2} x^3 e^{iux} du$$

qui nous donne

$$e^{i\theta \frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}} = 1 + i\theta\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)} - \frac{\theta^2(\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)})^2}{2} - i\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}\theta^3(\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)})^3 e^{iu\theta\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}} du$$

Comme $E(Y_{n,t}) = 0$ on en déduit que

$$\begin{aligned} E\Big(e^{i\theta \frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}}\Big) &= 1 - \frac{\theta^2(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)})^2}{2} - i\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}\theta^3 E\Big((\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)})^3 e^{iu\theta\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}}\Big)du \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2}(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)})^2 + L_n(\theta,t) \end{aligned}$$

où

$$L_n(\theta,t) = -i\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}\theta^3 E\Big((\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)})^3 e^{iu\theta\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}}\Big)du.$$

On a ainsi la majoration

$$|L_n(\theta,t)| \leq \theta^3 E\Big((\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)})^3\Big)\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}\left|e^{iu\theta\frac{Y_{n,t}}{\sigma(t)}}\right| du \leq \frac{|\theta|^3}{6(\sigma(t))^3}E(|Y_{n,t}|^3).$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.

Par l'indépendance des $Y_{n,t}$ la fonction caractéristique φ_{Z_t} de la variable aléatoire Z_t peut s'écrire

$$\varphi_{Z_t}(\theta) = \prod_{n\geq 1}\big(1 - \frac{\theta^2}{2}\big(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\big)^2 + L_n(\theta,t)\big). \tag{3.1}$$

Pour montrer que $\varphi_{Z_t}(\theta) \to e^{-\frac{\theta^2}{2}}$ quand $t \to 1$ nous allons utiliser le lemme suivant (dont nous donnons la démonstration dans l'Appendice (*voir* section 5)) :

Lemme 3.3 Soit $(u_{n,t})_{n\geq 1}$ une famille de suites complexes indexées par $t \in]0,1[$ telle que

($\imath$) $\sup_{n\geq 1}|u_{n,t}| \to 0$ quand $t \to 1$.

($\imath\imath$) il existe $M > 0$ et $0 < \alpha < 1$ tel que $\sum_{n\geq 1}|u_{n,t}| \leq M$ pour tout $t \in]\alpha, 1[$.

($\imath\imath\imath$) il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geq 1} u_{n,t} \to S$ quand $t \to 1$.

Alors

$$\lim_{t\to 1}\prod_{n\geq 1}(1+u_{n,t}) = e^S.$$

On va appliquer ce lemme à la fonction caractéristique (3.1) en posant

$$u_{n,t}(\theta) = -\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\right)^2 + L_n(\theta,t)$$

Vérifions les trois conditions du lemme :

($\imath$) On a

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1}|u_{n,t}(\theta)| &\leq \frac{\theta^2}{2}\sup_{n\geq 1}\left(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\right)^2 + \sup_{n\geq 1}L_n(\theta,t)\\ &\leq \frac{\theta^2}{2}\sup_{n\geq 1}\left(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\right)^2 + \frac{|\theta|^3}{6(\sigma(t))^3}\sum_{n\geq 1}E(|Y_{n,t}|^3)\end{aligned}$$

D'après les hypothèses c) et d) du théorème cette dernière quantité tend vers 0 quand $t \to 1$.

($\imath\imath$) On a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}|u_{n,t}(\theta)| &\leq \frac{\theta^2}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\right)^2 + \sum_{n\geq 1}L_n(\theta,t)\\ &\leq \frac{\theta^2}{2} + \frac{|\theta|^3}{6(\sigma(t))^3}\sum_{n\geq 1}E(|Y_{n,t}|^3).\end{aligned}$$

Or d'après c) la quantité $\frac{1}{(\sigma(t))^3}\sum_{n\geq 1}E(|Y_{n,t}|^3)$ est bornée au voisinage de 1.

($\imath\imath\imath$) On a

$$\sum_{n\geq 1}u_{n,t}(\theta) = -\frac{\theta^2}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\right)^2 + \sum_{n\geq 1}L_n(\theta,t) = \frac{\theta^2}{2} + \sum_{n\geq 1}L_n(\theta,t)$$

et $\sum_{n\geq 1}L_n(\theta,t) \to 0$ quand $t \to 1$ par c).

On a donc $\sum_{n\geq 1}u_{n,t}(\theta) \to -\frac{\theta^2}{2}$ quand $t \to 1$ et par le lemme (3.3)

$$\varphi_{Z_t}(\theta) = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\left(\frac{\sigma_{n,t}}{\sigma(t)}\right)^2 + L_n(\theta,t)\right) \to e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

□

4 Application aux partitions

Considérons la fonction définie par le produit infini

$$f(z) = \prod_{n\geq 1}^{+\infty}(1+z^n)$$

Cette fonction est analytique dans $D(0,1)$ car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$ converge uniformément sur tout compact de $D(0,1)$. On a

$$f(z) = \sum q(n) z^n$$

où $q(n)$ est le nombre de partitions restreintes de n, c'est-à-dire le nombre des décompositions $n = n_1 + \cdots + n_p$ en entiers strictement positifs *différents les uns des autres.*
Le but de ce qui suit est d'appliquer la méthode décrite au début de cet article pour obtenir la formule asymptotique des partitions restreintes :

$$q(n) \sim \frac{1}{4}\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{3}}}}{3^{1/4}n^{3/4}}.$$

Soit la mesure de probabilité associée à $f_n(t) = 1 + t^n$

$$\mu_t(f_n) = \frac{1}{1+t^n}\delta_0 + \frac{t^n}{1+t^n}\delta_n$$

où δ_0 et δ_n représentent les mesures de Dirac en 0 et n respectivement.
On associe à ces mesures une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_{n,t})$ (*voir* section (2.2)). La variable $X_{n,t}$ prend les valeurs 0 et n et on a

$$\begin{aligned} E(X_{n,t}) &= \frac{nt^n}{1+t^n} \\ Var(X_{n,t}) &= \frac{n^2t^n}{(1+t^n)^2}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit on posera

$$t = e^{-r}$$

où $r > 0$, de sorte que l'on a

$$t \to 1 \Leftrightarrow r \to 0.$$

4.1 Vérification des hypothèses du théorème de convergence

Les séries $\sum_{n\geq 1} E(X_{n,t})$ et $\sum_{n\geq 1} \sigma(X_{n,t})$ sont clairement convergentes. On pose

$$m(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kt^k}{1+t^k} \text{ et } \sigma^2(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{k^2t^k}{(1+t^k)^2}.$$

Examinons la série $\sum_{n\geq 1} E(|X_{n,t} - E(X_{n,t})|^3)$: on a

$$\begin{aligned} E(|X_{n,t} - E(X_{n,t})|^3) &= (\frac{nt^n}{1+t^n})^3\frac{1}{1+t^n} + (n - \frac{nt^n}{1+t^n})^3\frac{t^n}{1+t^n} \\ &= n^3\frac{t^{3n}+t^n}{(1+t^n)^4} \end{aligned}$$

donc la série $\sum_{n\geq 1} E(|X_{n,t} - E(X_{n,t})|^3)$ est convergente.
Ainsi les hypothèses a) et b) du théorème de convergence (3.1) sont bien vérifiées.

4.1.1 Comportement asymptotique de m et σ^2

Pour déterminer le comportement asymptotique quand $t \to 1$ des fonctions $m(t)$ et $\sigma^2(t)$on va utiliser de la formule d'Euler-McLaurin :
si $f \in C^1[0, +\infty[$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(1) + f(n)) + \int_1^n b_1(x)f'(x)dx$$

où $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Si $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ sont convergentes alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) = \int_1^{+\infty} f(x)dx + \frac{1}{2}f(1) + \int_1^{+\infty} b_1(x)f'(x)dx.$$

On a ainsi

$$m(e^{-r}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{-rk}}{1 + e^{-rk}} \sim_{r \to 0} \frac{1}{12}\pi^2 \frac{1}{r^2} = m_1(e^{-r})$$

car

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{-rk}}{1 + e^{-rk}} &= \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-rx}}{1 + e^{-rx}} dx + O(1) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} xe^{-rx(n+1)} dx + O(1) \\
&= \frac{1}{r^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} + O(1) \\
&= \frac{1}{12}\pi^2 \frac{1}{r^2} + O(1)
\end{aligned}$$

Et de la même manière, on a

$$\sigma^2(e^{-r}) \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^2 e^{-rx}}{(1 + e^{-rx})^2} dx \sim_{r \to 0} \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{r^3} = \sigma_1^2(e^{-r}) \tag{4.1}$$

car

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 e^{-rx}}{(1 + e^{-rx})^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \int_0^{+\infty} x^2 e^{-rxn} dx = \frac{2}{r^3} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

4.1.2 Les conditions c) et d)

Calculons $\Gamma_3(t) = \sum_{n \geq 1} E(|X_{n,t} - E(X_{n,t})|^3)$:

$$\sum_{n \geq 1} E(|X_{n,t} - E(X_{n,t})|^3) = \sum_{n \geq 1} n^3 \frac{e^{-3nr} + e^{-nr}}{(1 + e^{-nr})^4} \sim \int_0^{+\infty} \frac{x^3(e^{-3rx} + e^{-rx})}{(1 + e^{-rx})^4} dx = \frac{C}{r^4}$$

et donc

$$\frac{\Gamma_3(t)}{\sigma(t)^3} \sim \frac{\frac{C}{r^4}}{(\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{r^3})^{3/2}} = C_3 r^{1/2}$$

On a donc bien $\frac{\Gamma_3(t)}{\sigma(t)^3} \to 0$ quand $t \to 1$.
Il reste à voir que $\lim_{t\to 1} \sup_{n\geq 1} \dfrac{Var(X_{n,t})}{\sigma^2(t)} = 0$. On a

$$\frac{Var(X_{n,t})}{\sigma^2(t)} = \frac{1}{\sigma^2(t)} n^2 \frac{t^n}{(1+t^n)^2} \leq \frac{1}{\sigma^2(t)} n^2 t^n$$

Or on a $n^2 e^{-nr} \leq \frac{4}{r^2} e^{-2}$ pour tout n et $\sigma^2(e^{-r}) \sim \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{r^3}$ d'après (4.1) donc

$$\lim_{t\to 1} \sup_{n\geq 1} \frac{Var(X_{n,t})}{\sigma^2(t)} = 0.$$

Ainsi les hypothèses du théorème de convergence (3.1) sont bien vérifiées. Par conséquent la fonction caractéristique φ_{Z_t} de la variable aléatoire

$$Z_t = \frac{\sum_{n\geq 1} X_{n,t} - m(t)}{\sigma(t)}$$

converge vers $e^{-x^2/2}$ quand $t \to 1$.

4.2 Vérification de la condition de convergence forte

Pour en déduire une formule asymptotique du nombre de partitions restreintes $q(n)$ défini en (4), on doit vérifier les hypothèses du théorème des équivalents, en particulier la condition de convergence forte (*voir* équation (2.2) et Théorème (2.3)).
Il s'agit de montrer que

$$\lim_{t\to 1} \int_{-\pi\sigma(t)}^{\pi\sigma(t)} \left|\varphi_{Z_t}(\theta) - e^{-\theta^2/2}\right| d\theta = 0.$$

Pour cela on va décomposer l'intégrale précédente en

$$\int_{|\theta|\leq \frac{C}{r^{1/2}}} \left|\varphi_{Z_t}(\theta) - e^{-\theta^2/2}\right| d\theta + \int_{\frac{C}{r^{1/2}} \leq |\theta| \leq \pi\sigma(t)} \left|\varphi_{Z_t}(\theta) - e^{-\theta^2/2}\right| d\theta$$

et majorer $|\varphi_{Z_t}(\theta)|$ sur chacun des domaines d'intégration.

Lemme 4.1 Si $|\theta| \leq \dfrac{1}{4\frac{\Gamma_3(t)}{\sigma^3(t)}} \sim \dfrac{1}{4C_3} r^{-1/2}$ **alors** $|\varphi_{Z_t}(\theta)| \leq e^{-\theta^2/3}$**.**

Démonstration.
Posons $Y_{n,t} = X_{n,t} - E(X_{n,t})$ on a $Z_t = \frac{\sum_{n\geq 1} Y_{n,t}}{\sigma(t)}$. On a

$$\varphi_{Z_t}(\theta) = \prod_{n\geq 1} \varphi_{Y_{n,t}}\left(\frac{\theta}{\sigma(t)}\right)$$

Pour majorer $|\varphi_{Z_t}(\theta)|$ on va utiliser le lemme suivant dont la démonstration est reportée à la section (5.2) :

Lemme 4.2 (Lemme de Cramér) Soit X **une variable aléatoire telle que** $E(|X|^3) < +\infty$ **et** φ_X **sa fonction caractéristique. On a**

$$|\varphi_X(t)|^2 \leq e^{-t^2 E(X^2) + \frac{4}{3}|t|^3 E(|X|^3)}$$

En particulier si $|t| \leq \frac{1}{2}\frac{E(X^2)}{E(|X|^3)}$ **alors** $|\varphi_X(t)|^2 \leq e^{-\frac{t^2}{3}E(X^2)}$**.**

On ainsi

$$\left|\varphi_{Y_{n,t}}\Big(\frac{\theta}{\sigma(t)}\Big)\right|^2 \leq \exp\Big(-\frac{\sigma_{n,t}^2}{\sigma^2(t)}\theta^2 + \frac{4}{3}\frac{|\theta|^3 E(|Y_{n,t}|^3)}{\sigma^3(t)}\Big)$$

donc

$$|\varphi_{Z_t}(\theta)|^2 \leq \prod_{n\geq 1} \exp\Big(-\frac{\sigma_{n,t}^2}{\sigma^2(t)}\theta^2 + \frac{4}{3}\frac{|\theta|^3 E(|Y_{n,t}|^3)}{\sigma^3(t)}\Big) = \exp\Big(-\theta^2\big(1 - \frac{4}{3}|\theta|\frac{\Gamma_3(t)}{\sigma^3(t)}\big)\Big)$$

Pour conclure, si $|\theta| \leq \dfrac{1}{4\frac{\Gamma_3(t)}{\sigma^3(t)}}$ alors $1 - \frac{4}{3}|\theta|\frac{\Gamma_3(t)}{\sigma^3(t)} \geq 2/3$ et par conséquent $|\varphi_{Z_t}(\theta)|^2 \leq e^{-2\theta^2/3}$.

□

Comme $\pi\sigma(t) \sim \sqrt{\dfrac{1}{6}\dfrac{\pi^2}{r^{3/2}}}$ lorsque t tend vers 1 il suffit maintenant d'obtenir une majoration de la fonction caractéristique sur le domaine $\dfrac{1}{4C_3}r^{-1/2} \leq |\theta| \leq \sqrt{\dfrac{1}{6}\dfrac{\pi^2}{r^{3/2}}}$.

Lemme 4.3 Soit C une constante positive. Sous l'hypothèse $\frac{C}{r^{1/2}} \leq |\theta| < \pi\sigma(t)$ il existe un réel positif B tel que l'on ait $|\varphi_{Z_t}(\theta)| \leq e^{-B/r}$.

Démonstration.
La méthode consiste à écrire

$$\ln(|\varphi_{Z_t}(\theta)|) = \sum_{k\geq 1} \ln(\left|1 + t^k e^{ik\theta/\sigma(t)}\right|) - \ln(1+t^k).$$

On développe

$$\left|1 + t^k e^{ik\theta/\sigma(t)}\right|^2 = 1 + t^{2k} + 2t^k\cos(k\theta/\sigma(t))$$

et on écrit

$$\begin{aligned}
\ln(|\varphi_{Z_t}(\theta)|) &= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} \ln(1 + t^{2k} + 2t^k\cos(k\theta/\sigma(t))) - \ln(1 + t^{2k} + 2t^k) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} \ln(1 + \frac{2t^k(\cos(k\theta/\sigma(t)) - 1)}{1 + t^{2k} + 2t^k}) \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} \frac{2t^k(\cos(k\theta/\sigma(t)) - 1)}{1 + t^{2k} + 2t^k} \\
&\leq \frac{1}{4}\sum_{k\geq 1} t^k(\cos(k\theta/\sigma(t)) - 1)
\end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{k\geq 1} t^k(\cos(k\theta/\sigma(t)) = Re\big(\frac{te^{i\theta/\sigma(t)}}{1 - te^{i\theta/\sigma(t)}}\big) = \frac{t\cos(\theta/\sigma(t)) - t^2}{1 - 2t\cos(\theta/\sigma(t)) + t^2}$$

et puisque $Cr \leq |\theta|/\sigma(t) < \pi$ alors $\cos(\theta/\sigma(t)) \leq \cos(Cr)$. Par conséquent

$$\sum_{k\geq 1} t^k(\cos(k\theta/\sigma(t)) \leq \frac{t\cos(Cr) - t^2}{1 - 2t\cos(Cr) + t^2}$$

donc

$$\ln(|\varphi_{Z_t}(\theta)|) \leq \frac{1}{4}\Big(\frac{t\cos(Cr) - t^2}{1 - 2t\cos(Cr) + t^2} - \frac{t}{1-t}\Big) \backsim \Big(\frac{1}{1+C^2} - 1\Big)r^{-1}$$

On en déduit l'existence d'une constante $B > 0$ telle que l'on ait :

$$|\varphi_{Z_t}(\theta)| \leq e^{-B/r}$$

□

Théorème 4.4 On a

$$\lim_{t\to 1} \int_{-\pi\sigma(t)}^{\pi\sigma(t)} \left|\varphi_{Z_t}(\theta) - e^{-\theta^2/2}\right| d\theta = 0$$

Démonstration.
D'après le lemme (4.3) :

$$|\varphi_{Z_t}(\theta)| \leq e^{-B/r} \text{ si } \frac{C}{r^{1/2}} \leq |\theta| \leq \pi\sigma(t), \text{ avec } B > 0$$

et clairement

$$e^{-\theta^2/2} \leq e^{-C^2/2r}$$

sous les mêmes conditions. On a donc, avec $D = \min(B, C^2/2)$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{C}{r^{1/2}} \leq |\theta| \leq \pi\sigma(t)} \left|\varphi_{Z_t}(\theta) - e^{-\theta^2/2}\right| d\theta &\leq \int_{\frac{C}{r^{1/2}} \leq |\theta| \leq \pi\sigma(t)} |\varphi_{Z_t}(\theta)|\, d\theta + \int_{\frac{C}{r^{1/2}} \leq |\theta| \leq \pi\sigma(t)} e^{-\theta^2/2} d\theta \\
&\leq e^{-D/r}\Big(\pi\sigma(t) - \frac{C}{r^{1/2}}\Big)
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 lorsque t tend vers 1 (*i.e.* lorsque r tend vers 0).
Il reste à voir que

$$\lim_{t\to 1} \int_{|\theta| \leq \frac{C}{r^{1/2}}} \left|\varphi_{Z_t}(\theta) - e^{-\theta^2/2}\right| d\theta = 0$$

D'après le lemme (4.1), sur cet intervalle on a $|\varphi_{Z_t}(\theta)| \leq e^{-\theta^2/3}$ donc

$$\left|\varphi_{Z_t}(\theta) - e^{-\theta^2/2}\right| \leq e^{-\theta^2/3} + e^{-\theta^2/2}$$

et on peut conclure par le théorème de la convergence dominée.
□

4.3 Application du théorème des équivalents

On a choisi comme équivalent de la fonction m lorsque t tend vers 1 la fonction m_1 définie par

$$m_1(t) = \frac{\pi^2}{12 \ln^2(t)}.$$

On définit encore τ_n par l'égalité $m_1(\tau_n) = n$ et on pose $\tau_n = e^{-\rho_n}$.
On a alors

$$m_1(e^{-\rho_n}) = n \quad \text{autrement dit} \quad \rho_n = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\pi$$

et par conséquent

$$\tau_n = e^{-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\pi}.$$

ainsi que

$$\sigma_1^2(\tau_n) = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\pi)^3} = \frac{4}{\pi}\,(n)^{3/2}\,\sqrt{3}.$$

En outre

$$\frac{m(\tau_n) - m_1(\tau_n)}{\sigma_1(\tau_n)} = \varepsilon(\tau_n) \to 0$$

car

$$m(e^{-\rho_n}) - m_1(e^{-\rho_n}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k e^{-\rho_n k}}{1 + e^{-\rho_n k}} - \frac{1}{12}\pi^2 \frac{1}{\rho_n^2} = O(1).$$

Pour appliquer la formule asymptotique (2.3) : $a_n \sim \dfrac{f(\tau_n)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(\tau_n)\tau_n^n}$, il reste à calculer

$$f(\tau_n) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + e^{-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\pi k}).$$

Passons au logarithme

$$\ln(f(\tau_n)) = \sum_{k\geq 1} \ln(1 + e^{-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\pi k}).$$

Lemme 4.5 On a pour $\rho \to 0^+$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 + e^{-\rho k}) = \frac{\pi^2}{12\rho} - \frac{1}{2}\ln 2 + O(\rho).$$

Démonstration.
Appliquons la formule d'Euler-McLaurin :

$$\sum_{k\geq 1} \ln(1 + e^{-\rho k}) = \int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-\rho x})dx + \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-\rho}) - \rho \int_1^{+\infty} b_1(x)\frac{e^{-\rho x}}{1 + e^{-\rho x}}dx$$

a) Le terme $\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-\rho x})dx$:
Intégrons par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-\rho x})dx &= \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{-\rho x})dx - \int_0^1 \ln(1 + e^{-\rho x})dx \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\rho n x}dx - \ln 2 + O(\rho) \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\rho n^2} - \ln 2 + O(\rho).
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-\rho x})dx = -\ln 2 + \frac{\pi^2}{12\rho} + O(\rho).$$

b) Le terme $\frac{1}{2}\ln(1 + e^{-\rho})$:

$$\frac{1}{2}\ln(1 + e^{-\rho}) = \frac{1}{2}\ln 2 + O(\rho).$$

c) Soit $b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.
On a

$$-\rho \int_1^{+\infty} b_1(x)\frac{e^{-\rho x}}{1 + e^{-\rho x}}dx = O\left(\rho e^{-\rho}\right).$$

En effet la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-\rho x}}{1+e^{-\rho x}}$ est positive décroissante et elle tend vers 0 à l'infini. Comme la fonction b_1 est périodique, par le lemme d'Abel on obtient la majoration

$$\left| \int_1^{+\infty} b_1(x) \frac{e^{-\rho x}}{1+e^{-\rho x}} dx \right| \leq C \frac{e^{-\rho}}{1+e^{-\rho}} \leq Ce^{-\rho}.$$

$\square$

Conclusion

D'après le lemme (4.5) avec $\rho = \rho_n$ on a

$$\sum_{k \geq 1} \ln(1 + e^{-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\pi k}) = \frac{\pi\sqrt{n}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln 2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

donc

$$f(\tau_n) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 + e^{-\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{n}}\pi k}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}}$$

lorsque n tend vers l'infini, ce qui donne la formule asymptotique des partitions restreintes :

$$q(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{4}{\pi}(n)^{3/2}\sqrt{3}e^{-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{3}}\pi}}} = \frac{1}{4} \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{3}}}}{3^{1/4}n^{3/4}}.$$

5 Appendice

5.1 Démonstration du Lemme 3.3.

Comme $\sup_{n\geq 1} |u_{n,t}| \to 0$ quand $t \to 1$, il existe $a < 1$ tel que pour $t \in]a, 1[$ on a $|u_{n,t}| < 1/2$ pour tout $n \geq 1$. Donc $\ln(1 + u_{n,t})$ est bien défini pour $t \in]a, 1[$ et

$$\ln(1 + u_{n,t}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(u_{n,t})^k$$

ce qui donne

$$|\ln(1 + u_{n,t}) - u_{n,t}| \leq |u_{n,t}|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} |u_{n,t}|^{k-2} \leq |u_{n,t}|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{k-2} = 2 |u_{n,t}|^2$$

D'autre part la série $\sum_{n\geq 1} |u_{n,t}|$ est supposée convergente pour tout $t \in]\alpha, 1[$, donc la série $\sum_{n\geq 1} |u_{n,t}|^2$ est convergente si $t \in]\sup(a, \alpha), 1[$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1 + u_{n,t})$ est convergente si $t \in]\sup(a, \alpha), 1[$ et il en est donc de même du produit infini $\prod_{n\geq 1}(1 + u_{n,t})$.

D'autre part, pour tout $N \geq 1$ on a

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \ln(1 + u_{n,t}) - \sum_{n=1}^{N} u_{n,t} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} |\ln(1 + u_{n,t}) - u_{n,t}| \leq 2 \sum_{n=1}^{N} |u_{n,t}|^2$$

Comme

$$\sum_{n=1}^{N} |u_{n,t}|^2 \leq \sup_{n\geq 1} |u_{n,t}| \sum_{n=1}^{N} |u_{n,t}| \leq M \sup_{n\geq 1} |u_{n,t}|$$

on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{n,t}|^2 \leq M \sup_{n\geq 1} |u_{n,t}|$ et que

$$\lim_{N\to+\infty} \left| \sum_{n=1}^{N} \ln(1+u_{n,t}) - \sum_{n=1}^{N} u_{n,t} \right| \leq 2M \sup_{n\geq 1} |u_{n,t}|$$

Donc

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+u_{n,t}) - \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,t} \right| \leq 2M \sup_{n\geq 1} |u_{n,t}|.$$

Pour conclure il suffit de prendre la limite quand $t \to 1$, on obtient

$$\lim_{t\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+u_{n,t}) = \lim_{t\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,t} = S$$

En passant à l'exponentielle on obtient

$$\lim_{t\to 1} \prod_{n=1}^{+\infty} (1+u_{n,t}) = e^S$$

□

5.2 Démonstration du Lemme de Cramér (Lemme 4.2)

Démonstration. (*voir* Cramér [3], Chung [2] p. 210)
Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi. On a

$$|\varphi_X(t)|^2 = \varphi_X(t)\overline{\varphi_Y(t)} = E(e^{itX})\overline{E(e^{itY})} = E(e^{it(X-Y)})$$

ce qui permet d'écrire

$$|\varphi_X(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{it(x-y)} dP_X(x) dP_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \cos(t(x-y)) dP_X(x) dP_Y(y)$$

La formule de Taylor à l'ordre 2 donne

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \int_0^u \frac{(u-s)^2}{2} \sin(s) ds$$

ce qui permet d'écrire la majoration

$$\cos(u) \leq 1 - \frac{u^2}{2} + \left| \int_0^u \frac{(u-s)^2}{2} ds \right| = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{|u|^3}{6}.$$

On en déduit que

$$|\varphi_X(t)|^2 \leq 1 - \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (x-y)^2 dP_X(x) dP_Y(y) + \frac{|t|^3}{6} \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^3 dP_X(x) dP_Y(y).$$

La première intégrale n'est autre que $2E(X^2)$. Pour la deuxième on utilise la majoration

$$|x-y|^3 \leq 4|x|^3 + 4|y|^3$$

ce qui permet de majorer l'intégrale par $8E(|X|^3)$.
On obtient finalement

$$|\varphi_X(t)|^2 \leq 1 - t^2 E(X^2) + \frac{4}{3} |t|^3 E(|X|^3) \leq e^{-t^2 E(X^2) + \frac{4}{3}|t|^3 E(|X|^3)}.$$

Pour la seconde partie du lemme, si $|t| \leq \frac{1}{2} \frac{E(X^2)}{E(|X|^3)}$ il suffit de remarquer que

$$-t^2 E(X^2) + \frac{4}{3} |t|^3 E(|X|^3) = -t^2 [E(X^2) - \frac{4}{3} |t| E(|X|^3)] \leq -t^2 \frac{1}{3} E(X^2).$$

□

Références

[1] Báez-Duarte, L., *"Hardy-Ramanujan's Asymptotic Formula for Partitions and the Central Limit Theorem,"* Advances in Mathematics 125, 114-120 (1997).

[2] Chung, K.L., *"A Course in Probability Theory,"* Harcourt, Brace and World, New York (1968).

[3] Cramér, H., *"Random Variables and Probability Distributions,"* 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1963).

[4] Erdös, P., Lehner, J., *"The Distribution of the Number of Summands in the Partitions of a Positive Integer,"* Duke Mathematical Journal Vol. 8, No.2 (June, 1941)

[5] Hayman, W.K., *"A Generalisation of Stirling'sFormula,"* J. Reine Angew. Mat. 196, Nos. 1/2, 67-95 (1956).

[6] Ingham, A.E., *"A Tauberian Theorem for Partitions,"* The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 42, No. 5, 1075-1090 (Dec., 1941)

[7] Rosenbloom, P.C., *"Probability and Entire Functions,"* Studies in Mathematical Analysis and Related Topics, Vol. 45, 325-332, Stanford Univ. Press, Palo Alto, CA (1962).