# Le produit harmonique des suites

Bernard Candelpergher, Marc-Antoine Coppo

# Le produit harmonique des suites

Bernard Candelpergher et Marc-Antoine Coppo
Université de Nice Sophia Antipolis
Laboratoire Jean Alexandre Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2
FRANCE

Bernard.CANDELPERGHER@unice.fr
Marc-Antoine.COPPO@unice.fr

Juin 2011

**Résumé**

Au moyen d'une transformation binomiale involutive, on définit dans l'espace des suites complexes un nouveau produit appelé « harmonique » en raison de ses remarquables propriétés vis à vis des sommes harmoniques. La transformation d'Euler des séries permet alors de déduire de ces propriétés d'harmonicité de nouvelles et remarquables identités.

**Mathematical Subject Classification (2000) :** 05A10, 05A19, 11B65, 11B83, 40-99.

**Mots-clés :** Transformation binomiale ; sommes harmoniques ; formule de Dilcher ; sommation d'Euler ; transformation d'Euler des séries.

## 1 Introduction

Dans l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ des suites à valeurs complexes, on considère la transformation $D$ associant à toute suite $a = (a(1), a(2), a(3), \cdots)$ la suite $D(a)$ définie par

$$D(a)(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

L'opérateur $D$ est un automorphisme involutif du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, i.e.

$$a = D(D(a)).$$

Formellement, les suites $a$ et $D(a)$ sont liées par la relation :

$$\sum_{n\geq 1} D(a)(n)z^n = -\sum_{n\geq 1} a(n)(\frac{z}{z-1})^n .$$

La relation précédente montre en particulier que la suite harmonique $n \mapsto \dfrac{1}{n}$ est invariante par $D$. En notant $\dfrac{1}{N}$ cette suite, on peut donc écrire

$$D(\frac{1}{N}) = \frac{1}{N} .$$

Si $D(a)D(b)$ désigne la suite obtenue par produit terme à terme des suites $D(a)$ et $D(b)$, on définit un nouveau produit dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, noté $\bowtie$, par la formule

$$a \bowtie b = D(D(a)D(b)) .$$

Il en résulte (par involutivité de $D$) que $D(ab) = D(a) \bowtie D(b)$. Muni du produit $\bowtie$, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ est une algèbre commutative et associative, l'élément unité étant la suite $\delta_0 = (1,0,0,\dots) = D(\mathbf{1})$ où $\mathbf{1}$ est la suite $(1,1,1,\dots)$. Une suite $a$ est inversible pour le produit $\bowtie$ si et seulement si $D(a)$ est inversible pour le produit terme à terme, *i.e.* $D(a)(n) \neq 0$ pour tout $n$.

Une expression explicite du produit $a \bowtie b$ est donnée par la formule

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{0\leq l\leq k\leq n} (-1)^{k-l}\binom{n}{k}\binom{k}{l} a(k+1)b(n+1-l) \quad (n\geq 0) ,$$

qui permet de le calculer pour de petites valeurs de $n$ ; on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&(a \bowtie b)(1) = a(1)b(1) ,\\
&(a \bowtie b)(2) = a(2)b(1) + a(1)b(2) - a(2)b(2) ,\\
&(a \bowtie b)(3) = a(3)b(1) + a(1)b(3) + 2a(2)b(2) - 2a(3)b(2) - 2a(2)b(3) + a(3)b(3)\\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Le produit $\bowtie$ possède des propriétés remarquables vis à vis des sommes harmoniques qui justifient sa dénomination de *produit harmonique*. On démontre en particulier (Théorème 2) la relation suivante : pour toute suite $a$, on a l'identité

$$\left(\frac{1}{N} \bowtie a\right)(n) = \frac{1}{n}(a(1) + a(2) + \cdots + a(n)) .$$

De cette propriété d'harmonicité découlent plusieurs applications remarquables. On obtient notamment (Théorème 4) la formule suivante :

$$\sum_{n\geq n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1\dots n_{k-1}}\, a(n_k) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\binom{n}{m}\frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m)$$

qui est valable pour toute suite $a$ et pour tout entier $k \geq 1$. Dans le cas où $a$ est la suite harmonique $\frac{1}{N}$, on retrouve la classique « formule de Dilcher » (cf. [2], [3], [4]). On introduit les nombres

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} a(n_k)$$

qui apparaissent comme une généralisation naturelle des nombres harmoniques $c_n^{(k)}$ de Rota et Roman (cf. [8], [9]) : on a en effet la relation $c_n^{(k)} = S^{(k)}(\frac{1}{N})(n)$. Par transformation d'Euler, on déduit la relation

$$\sum_{n \geq 1} \frac{D(a)(n)}{n^k} z^n = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n)(\frac{z}{z-1})^n$$

qui permet notamment, dans le cas où $a$ est la suite $n \mapsto \frac{1}{2n-1}$, d'étendre naturellement une formule de Ramanujan pour la constante de Catalan ([1], chapitre 9, Entry 34).

# 2 Préliminaires : Opérateurs dans l'espace des suites

## 2.1 L'isomorphisme $\Phi$

**Notation.** Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ des suites $a = (a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n), \cdots)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{E}^*$.

**Définition 1.** Si $\mathbb{C}[[z]]$ désigne l'espace des séries formelles, on a un isomorphisme naturel :

$$\Phi : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$$

défini par

$$\Phi(a)(z) = \sum_{n \geq 0} a(n+1) \frac{z^n}{n!} = a(1) + a(2)z + a(3)\frac{z^2}{2} + a(4)\frac{z^3}{6} + \cdots$$

**Définition 2.** Les opérateurs sur $\mathcal{E}^*$ se transforment en opérateurs sur $\mathbb{C}[[z]]$ via l'isomorphisme $\Phi$. Plus précisément, si $U$ désigne un opérateur sur $\mathcal{E}^*$, il lui correspond l'opérateur $u$ sur $\mathbb{C}[[z]]$ défini par la relation

$$\Phi U = u \Phi \Leftrightarrow u = \Phi U \Phi^{-1}$$

qu'on appelle l'image de $U$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}^* \arrow[r, "U"] & \mathcal{E}^* \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathbb{C}[[z]] \arrow[u, "\Phi^{-1}"] \arrow[r, "u"] & \mathbb{C}[[z]] \end{tikzcd}$$

L'image de l'opérateur $I$ d'identité sur $\mathcal{E}^*$ est notée Id.

**Exemple 1.** a) La suite $\delta_k$ définie pour $k \geq 0$ et $n \geq 1$ par

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie la relation

$$\Phi(\delta_k)(z) = \frac{z^k}{k!} \,.$$

On a $\delta_0 := (1,0,0,\dots)\,,\delta_1 := (0,1,0,\dots)$, etc. Les suites $(\delta_k)_{k\geq 0}$ forment une base naturelle de l'espace $\mathcal{E}^*$.

b) La suite $\mathbf{1} := (1,1,1,\dots)$ vérifie $\Phi(\mathbf{1})(z) = e^z$.

c) La suite $N := (1,2,3,\dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(N)(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{z^n}{n!} = ze^z + e^z = (1+z)e^z.$$

d) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, La suite géométrique $\alpha^{N-1} := (1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(\alpha^{N-1})(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{\alpha^n z^n}{n!} = e^{\alpha z}.$$

e) La suite $\dfrac{1}{N} := (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots)$ vérifie la relation

$$\Phi(\frac{1}{N})(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{(n+1)!} = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right)\,.$$

Dans la suite de cet article, on la désigne sous le nom de *suite harmonique*.

**Notation.** Si $a$ et $b$ sont deux suites dans $\mathcal{E}^*$, on note $ab$ la suite $n \mapsto a(n)b(n)$. On a en particulier : $\mathbf{1}a = a$ et $\delta_k a = a(k+1)\delta_k$ pour tout $k \geq 0$. Muni de ce produit (dit ordinaire), $\mathcal{E}^*$ est une algèbre commutative, associative notée $\mathcal{A}$. L'élément unité de $\mathcal{A}$ est la suite $\mathbf{1}$.

## 2.2 Les opérateurs $L$ et $R$

**Définition 3.** L'opérateur $L$ de décalage à gauche sur $\mathcal{E}^*$ est défini par $L(a)(n) = a(n+1)$, *i.e.*

$$(a(1),a(2),a(3),\dots) \overset{L}{\longmapsto} (a(2),a(3),a(4),\dots)$$

L'image de $L$ est l'opérateur de dérivation formelle $\partial$ :

$$\Phi(L(a))(z) = \partial\Phi(a)(z) = \sum_{n\geq 0}a(n+2)\frac{z^n}{n!} = a(2) + a(3)z + a(4)\frac{z^2}{2!} + \cdots$$

**Définition 4.** L'opérateur $R$ de décalage à droite sur $\mathcal{E}^*$ est défini par

$$R(a)(n) = \begin{cases} a(n-1) & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

*i.e.*

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \stackrel{R}{\longmapsto} (0, a(1), a(2), a(3), \dots)$$

L'image $r$ de $R$ est l'opérateur d'intégration formelle :

$$\Phi(R(a))(z) = \int_0^z \Phi(a)(t)\, dt = \sum_{n\geq 0} a(n+1)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = a(1)z + a(2)\frac{z^2}{2!} + \cdots$$

**Remarque 1.** On a la relation $LR = I$, mais on notera que $RL$ n'est pas l'identité.

**Notation.** La suite $R(a) = (0, a(1), a(2), \cdots)$ est notée $(0, a)$.

**Exemple 2.**

$$R(N) = (0, N) = (0, 1, 2, 3, \cdots) = N - \mathbf{1}\,;\ \Phi(N - \mathbf{1})(z) = ze^z\,.$$

### 2.3 Les opérateurs $D$ et $S$

**Définition 5.** Soit $V : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation défini par $V(a) = a(1)$, son image est l'application $v : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $v(\Phi(a)) = V(a)$.

L'opérateur $D : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$D(a)(n) = V\left((I - L)^{n-1}a\right) = v\left((\mathrm{Id} - \partial)^{n-1}\Phi(a)\right)\,,$$

c'est-à-dire

$$D(a)(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}a(k) \text{ pour tout } n \geq 1,$$

ou encore

$$D(a)(n+1) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}a(k+1) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

**Exemple 3.**

$$\begin{aligned} D(a)(1) &= a(1) \\ D(a)(2) &= a(1) - a(2) \\ D(a)(3) &= a(1) - 2a(2) + a(3)\,. \end{aligned}$$

**Proposition 1** (Relation entre $T$ et $D$)**.** Soit $T$ la transformation binomiale définie sur $\mathcal{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$T(a)(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a(k)$$

et $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^\star$ la projection naturelle :

$$(a(0), a(1), a(2), a(3), \cdots) \overset{\pi}{\longmapsto} (a(1), a(2), a(3), \cdots) \ ,$$

on a la relation

$$D(\frac{1}{N}\pi(a)) = a(0)\frac{1}{N} - \frac{1}{N}\pi(T(a)) \,. \tag{1}$$

*Démonstration.* On a pour $n \geq 1$,

$$nD(\frac{1}{N}\pi(a))(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}a(k) = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a(k) = -T(a)(n) + a(0).$$

□

**Proposition 2.** On a la relation

$$\Phi\left(D(a)\right)(z) = e^z\Phi(a)(-z)\,, \tag{2}$$

autrement dit, l'image $d$ de l'opérateur $D$ est telle que

$$d(f)(z) = e^z f(-z) \quad \text{pour tout } f \in \mathbb{C}[[z]]$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} e^z\Phi(a)(-z) &= \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}\sum_{k\geq 0}a(k+1)(-1)^k\frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k a(k+1)\frac{z^n}{n!} = \Phi\left(D(a)\right)(z)\,. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.** L'opérateur $D$ est un automorphisme involutif *i.e.* $D = D^{-1}$.

*Démonstration.* Pour montrer que $D = D^{-1}$, il suffit de montrer que $d = d^{-1}$. On a

$$d(f) = g \Leftrightarrow e^z f(-z) = g(z) \Leftrightarrow f(-z) = e^{-z}g(z) \Leftrightarrow f(z) = e^z g(-z) \Leftrightarrow f = d(g)\,.$$

□

**Exemple 4.** a) $D(\mathbf{1}) = \delta_0$, $D(N) = \delta_0 - \delta_1$, $D(\delta_1) = \mathbf{1} - N$.

b) On a vu que $\Phi(\alpha^{N-1}) = e^{\alpha z}$. Il en résulte par (2) que $D(\alpha^{N-1}) = (1-\alpha)^{N-1}$. En particulier la suite $(\frac{1}{2})^{N-1}$ est invariante par $D$.

c) On a vu que $\Phi(\frac{1}{N}) = \frac{1}{z}(e^z - 1)$. Il en résulte par (2) que la suite harmonique est invariante par $D$ :

$$D(\frac{1}{N}) = \frac{1}{N}\,.$$

**Proposition 3.** Pour toute suite $a$,

$$DL(a) = (I - L)D(a) \tag{3}$$

*Démonstration.* On a

$$\Phi(DL(a))(z) = e^z\Phi(L(a))(-z) = e^z\partial\Phi(a)(-z) = e^z\Phi(a)(-z) - \partial(e^z\Phi(a)(-z))\,,$$

d'où $DL = D - LD = (I - L)D$ et $DL^{p+1} = DL^pL = (I - L)^pDL = (I - L)^{p+1}D$ . $\square$

**Définition 6.** L'opérateur de sommation $S : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$S(a)\,(n) = \sum_{k=1}^{n} a(k)\,.$$

**Exemple 5.** 1) $S(\delta_0) = \mathbf{1}, S(\mathbf{1}) = N$.
2) $S(\alpha^{N-1}) = \dfrac{1}{1-\alpha}(\mathbf{1} - \alpha^N)$ pour $\alpha \neq 1$. En particulier,

$$S((-1)^{N-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (-1)^{N-1}) = (1, 0, 1, 0, \dots)$$

**Proposition 4.** L'opérateur $S$ est un automorphisme d'inverse $S^{-1} = I - R$.

*Démonstration.* On a

$$b(n) = S(a)(n) \Leftrightarrow a(n) = b(n) - b(n-1) \text{ pour } n > 1 \text{ et } a(1) = b(1)\,.$$

$\square$

**Notation.** On pose $H := S(\dfrac{1}{N})$, $O := S(\dfrac{1}{2N-1})$, et pour $k \geq 2$, $H^{(k)} := S(\dfrac{1}{N^k})$ et $O^{(k)} := S(\dfrac{1}{(2N-1)^k})$ avec :

$$\frac{1}{N^k} := \underbrace{\frac{1}{N}\cdots\frac{1}{N}}_{k} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(2N-1)^k} := \underbrace{\frac{1}{2N-1}\cdots\frac{1}{2N-1}}_{k}\,.$$

Pour $n \geq 1$, on a donc

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,,\ O(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\,,\ H^{(2)}(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\,,\ O^{(2)}(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}\,.$$

**Exemple 6.** Les relations

$$\sum_{k=1}^{n} H(k) = (n+1)H(n) - n$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{H(k)}{k} = \frac{1}{2}(H(n))^2 + \frac{1}{2}H^{(2)}(n)\,,$$

se démontrent facilement par récurrence ; elle se traduisent par :

$$S(H) = (N+1)H - N$$

et

$$S(\frac{1}{N}H) = \frac{1}{2}(H^2 + H^{(2)})\,.$$

**Proposition 5.** On a la relation

$$\Phi(S(a))(z) = \Phi(a)(z) - e^z \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t)dt\,, \tag{4}$$

Autrement dit, l'image $s$ de $S$ est l'opérateur $\mathrm{Id} - drd$.

*Démonstration.* On a la relation $(L-I)S = L$ qui se traduit par $(\partial - \mathrm{Id})\Phi(S(a)) = \partial\Phi(a)$. En résolvant l'équation différentielle $(\partial - \mathrm{Id})\Phi(S(a)) = \partial\Phi(a)$, on obtient

$$\Phi(S(a))(z) = \Phi(a)(z) + e^z \int_0^{z} e^{-t}\Phi(a)(t)dt = \Phi(a)(z) - e^z \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t)dt$$

□

**Proposition 6.** Pour tout entier naturel $p$, l'automorphisme $DS^p$ est involutif. En particulier :

$$DS = (DS)^{-1} = S^{-1}D = (I-R)D\,.$$

*Démonstration.* On a vu que l'image $s$ de $S$ est l'opérateur $\mathrm{Id} - drd$. On en déduit que

$$S = I - DRD\,.$$

D'où $DS = D - RD = (I-R)D = S^{-1}D = (DS)^{-1}$. Pour $p \geq 1$, on écrit $DS^{p+1} = DS^pS = S^{-p}DS = S^{-p-1}D$ i.e.

$$DS^p = S^{-p}D = (DS^p)^{-1}$$

□

**Exemple 7.** Comme $a = \dfrac{1}{N}$ est invariante par $D$, on en déduit que

$$D(H) = (I - R)(\frac{1}{N}) = \frac{1}{N} + (0, -\frac{1}{N}) = \delta_0 + (0, -\frac{1}{N(N+1)}),$$

c'est à dire

$$D(H)(n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n(n+1)} & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

**Proposition 7.** Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation

$$D\left(\frac{1}{N} S(a)\right) = \frac{1}{N} D(a). \tag{5}$$

*Démonstration.* Comme $S^{-1} = I - R$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(S^{-1}(a))(z) = \Phi(a)(z) - \int_0^z \Phi(a)(t)\, dt &= \Phi(a)(z) - z \sum_{n \geq 0} \frac{a(n+1)}{n+1} \frac{z^n}{n!} \\ &= \Phi(a)(z) - z\Phi(\frac{1}{N} a) \end{aligned}$$

En remplaçant $a$ par $S(a)$ dans la relation précédente, on obtient alors l'égalité

$$\Phi(\frac{1}{N} S(a)) = \frac{\Phi(S(a)) - \Phi(a)}{z}.$$

D'après la Proposition 2, on a donc

$$\Phi(\frac{1}{N} S(a)) = -\frac{e^z}{z} \int_0^{-z} e^t \Phi(a)(-t) dt.$$

D'où

$$\Phi(D(\frac{1}{N} S(a))) = \frac{1}{z} \int_0^z e^t \Phi(a)(-t) dt = \frac{1}{z} \int_0^z \Phi(D(a))(t) dt = \Phi(\frac{1}{N} D(a)).$$

□

**Exemple 8.**

$$D\left(\frac{1}{N} H\right) = \frac{1}{N} D(\frac{1}{N}) = \frac{1}{N} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}$$

d'où aussi

$$D\left(\frac{1}{N} H^{(2)}\right) = \frac{1}{N} D(\frac{1}{N^2}) = \frac{1}{N^2} H.$$

### 2.4 Formule de Vandermonde

**Notation.** Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $(\alpha)_0 = 1$ et $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$ pour $n \geq 1$. On note $(\alpha)_N$ la suite $n \mapsto (\alpha)_n$. On pose $N! := (1)_N$.

**Proposition 8.** Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour $\beta \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$ On a la relation

$$D\left(\frac{1}{N}\frac{(\alpha)_N}{(\beta)_N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N}\frac{(\beta-\alpha)_N}{(\beta)_N} \tag{6}$$

En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$

$$D\left(\frac{(N-1)!}{(\alpha)_N}\right) = \frac{1}{N} - \frac{(\alpha-1)_N}{N\,(\alpha)_N} = \frac{1}{N+\alpha-1} \tag{7}$$

*Démonstration.* D'après la formule de Vandermonde (cf. Henrici, p. 25), on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_k\,(-n)_k}{(\beta)_k\,k!} = \frac{(\beta-\alpha)_n}{(\beta)_n}$$

La relation (6) s'en déduit alors par (1). □

**Remarque 2.** Notons que la formule de Vandermonde peut s'écrire plus simplement

$$D\left(\frac{(\alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}}\right) = \frac{(\beta-\alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}} \tag{8}$$

**Exemple 9.** En appliquant (7) avec $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient

$$D\left(\frac{2^{2x}(N!)^2}{N(2N)!}\right) = \frac{1}{N} - \frac{1}{N}\frac{-1/2}{N-1/2} = \frac{2}{2N-1}$$

En posant

$$\binom{2N}{N} := \frac{(2N)!}{(N!)^2},$$

on en déduit

$$D(\frac{1}{2N-1}) = \frac{1}{N}\frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}} \tag{9}$$

d'où aussi par (5) :

$$D\left(\frac{1}{N}O\right) = \frac{1}{N}D(\frac{1}{2N-1}) = \frac{1}{N^2}\frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}.$$

## 3 Le produit harmonique

### 3.1 L'algèbre $\mathcal{H} = (\mathcal{E}^*, \bowtie)$

On rappelle que $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre $(\mathcal{E}^*, \cdot)$ munie du produit ordinaire des suites (*i.e.* terme à terme).

**Définition 7.** On définit le produit harmonique $a \bowtie b$ de deux suites $a$ et $b$ dans $\mathcal{E}^*$ par

$$a \bowtie b := D(D(a)D(b))$$

Comme $D = D^{-1}$, on déduit immédiatement de la définition précédentes les deux relations fondamentales suivantes :

$$D(a \bowtie b) = D(a)D(b) \tag{10}$$

et

$$D(ab) = D(a) \bowtie D(b)\,. \tag{11}$$

**Exemple 10.** 1) On a $\mathbf{1} \bowtie a = a(1)\mathbf{1}$, car

$$D(\mathbf{1} \bowtie a) = D(\mathbf{1})D(a) = \delta_0 D(a) = D(a)(1)\delta_0 = a(1)\delta_0 = a(1)D(\mathbf{1}).$$

2) On a $N \bowtie a = a(2)\mathbf{1} + (a(1) - a(2))N$, car

$$D(N)D(a) = (\delta_0 - \delta_1)D(a) = D(a)(1)\delta_0 - D(a)(2)\delta_1 = a(1)D(N) + a(2)D(1 - N)\,.$$

3) On a $\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1} = (\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1}$, car

$$\begin{aligned} D(\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1}) &= (1-\alpha)^{N-1}(1-\beta)^{N-1} \\ &= (1 - (\alpha + \beta - \alpha\beta))^{N-1} \\ &= D((\alpha + \beta - \alpha\beta)^{N-1})\,. \end{aligned}$$

4) Par la formule de Vandermonde (8), on a $\dfrac{(\gamma - \beta)_{N-1}}{(\gamma)_{N-1}} \bowtie \dfrac{(\beta - \alpha)_{N-1}}{(\beta)_{N-1}} = \dfrac{(\gamma - \alpha)_{N-1}}{(\gamma)_{N-1}}\,.$

**Proposition 9.** L'espace $(\mathcal{E}^*, \bowtie)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative, associative et unitaire notée $\mathcal{H}$, isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}$. L'élément unité dans $\mathcal{H}$ est la suite $\delta_0$.

*Démonstration.* La bilinéarité du produit $\bowtie$ résulte de la linéarité de $D$ et de la bilinéarité du produit ordinaire. De plus, il résulte immédiatement des propriétés (10) et (11) que l'opérateur $D$ réalise un isomorphisme d'algèbre entre les $\mathbb{C}$-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$.

Il en résulte que $\mathcal{H}$ hérite des propriétés d'associativité et de commutativité de $\mathcal{A}$. En particulier, l'élément unité de $\mathcal{H}$ est l'image de $\mathbf{1}$ par $D$, c'est à dire $\delta_0$. $\square$

**Remarque 3.** L'algèbre $\mathcal{H}$ contient des diviseurs de zéro. On a par exemple

$$\mathbf{1} \bowtie \delta_1 = 0$$

**Corollaire 2.** Une suite $a$ est inversible dans $\mathcal{H}$ si et seulement si la suite $D(a)$ est inversible dans $\mathcal{A}$ (i.e. $D(a)(n) \neq 0$ pour tout $n$). Dans ce cas, l'inverse harmonique de $a$ est donné par la formule

$$a^{\bowtie(-1)} = D\left(\frac{1}{D(a)}\right) . \tag{12}$$

*Démonstration.*

$$a \bowtie b = \delta_0 \Leftrightarrow D(a)D(b) = D(\delta_0) = \mathbf{1} \Leftrightarrow D(b) = \frac{1}{D(a)} .$$

□

**Exemple 11.** a) Les suites $\mathbf{1}$ et $N$ ne sont pas inversibles dans $\mathcal{H}$.

b)

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(-1)} = D(N) = \delta_0 - \delta_1 .$$

c)

$$\left(\alpha^{N-1}\right)^{\bowtie(-1)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{N-1}$$

### 3.2 Puissances harmoniques $k$-ièmes

**Définition 8.** Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier $k \geq 0$, la puissance harmonique $k$-ième de $a$ notée $a^{\bowtie k}$ par

$$a^{\bowtie 0} = \delta_0 \quad \text{et } a^{\bowtie(k+1)} = a^{\bowtie k} \bowtie a .$$

Par récurrence sur $k$, on en déduit immédiatement la formule suivante :

$$a^{\bowtie k} = D(\underbrace{D(a)\dots D(a)}_{k}) = D\left((D(a))^k\right) .$$

En particulier, si $a$ est invariante par $D$, alors $a^{\bowtie k} = D(a^k)$.

**Exemple 12.** a)

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} = D(\frac{1}{N^k})$$

b)

$$N^{\bowtie k} = D((\delta_0 - \delta_1)^k) = \mathbf{1} + (-1)^k(1-N) = \begin{cases} N & \text{si } k \text{ impair} \\ 2-N & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

c)

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = \sum_{n=0}^{k} n! S(k,n) \delta_n$$

où les $S(k,n)$ sont les nombres de Stirling de deuxième espèce. En effet :

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = D((-1)^k (N-1)^k)$$

et

$$D\left((-1)^k (N-1)^k\right)(n+1) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{n}{m} m^k = n! S(k,n)$$

### 3.3 Image de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}[[z]]$

**Théorème 1.** *Pour toutes suites $a$ et $b$,*

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = \sum_{n \geq 0} (v_x \otimes v_y)(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)^n \left(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\right) \frac{z^n}{n!} \tag{13}$$

*avec $\Phi(a) \otimes \Phi(b)(x,y) := \Phi(a)(x)\Phi(b)(y)$. Il en résulte que pour tout entier $n \geq 0$,*

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l}\, a(k+1) b(l+1)$$

*avec*

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l}\, X^k Y^l \, .$$

*Démonstration.* On a

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = \Phi(D(D(a)D(b)))(z) = e^z \Phi(D(a)D(b))(-z)$$

et

$$D(a)(n+1) = v\left((\mathrm{Id} - \partial)^n \Phi(a)\right) \qquad \text{avec} \qquad v(\Phi(a)) = \Phi(a)(0) = a(1) \, .$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(D(a)D(b)\right)(n+1) &= (v_x \otimes v_y)[(\mathrm{Id} - \partial_x)(\mathrm{Id} - \partial_y)]^n \left(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\right)(x,y) \\ &= (v_x \otimes v_y)[(\mathrm{Id} - (\partial_x + \partial_y - \partial_z \partial_y)]^n \left(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\right)(x,y) \, . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Phi\left(D(a)D(b)\right)(-z) &= (v_x \otimes v_y) \sum_{n \geq 0} [(\mathrm{Id} - (\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)]^n \left(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\right)(-1)^n \frac{z^n}{n!} \\ &= e^{-z} (v_x \otimes v_y) e^{(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y) z} \left(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\right) \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\Phi(a \bowtie b)(z) &= (v_x \otimes v_y) e^{(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y) z} \Phi(a) \otimes \Phi(b) \\ &= \sum_{n \geq 0} (v_x \otimes v_y)(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)^n \left(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\right) \frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

Par identification du terme général, on en déduit que

$$\begin{aligned}(a \bowtie b)(n+1) &= (v_x \otimes v_y)(\partial_x + \partial_y - \partial_x \partial_y)^n \left(\Phi(a) \otimes \Phi(b)\right) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} (v_x \otimes v_y)\, C_n^{k,l} \partial_x^k \Phi(a) \partial_y^l \Phi(b) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l}\, a(k+1) b(l+1)\end{aligned}$$

avec

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l}\, X^k Y^l\,.$$

□

**Corollaire 3** (Expression explicite du produit harmonique)**.**

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1) b(n+1-l) \quad (n \geq 0)\,,$$

*Démonstration.* En développant $(X + Y - XY)^n$ par la formule du binôme et en identifiant le coefficient de $X^k Y^l$, on vérifie que

$$C_n^{k,l} = (-1)^{k+l-n} \frac{n!}{(n-k)!(n-l)!(l+k-n)!} \text{ si } n \leq k + l, \text{ et } C_n^{k,l} = 0 \text{ sinon }.$$

d'où

$$\begin{aligned}(a \bowtie b)(n+1) &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n}} C_n^{k,l}\, a(k+1) b(l+1) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq l \leq n \\ k+l \geq n}} (-1)^{k+l-n} \frac{n!}{(n-k)!(n-l)!(l+k-n)!}\, a(k+1) b(l+1) \\ &= \sum_{0 \leq l \leq k \leq n} (-1)^{k-l} \binom{n}{k} \binom{k}{l} a(k+1) b(n-l+1)\,.\end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.** On a la relation

$$\Phi(a \bowtie b)(z) = v_y \left(\Phi(a)[(\mathrm{Id} - \partial_y)z]\Phi(b)[y+z]\right) \tag{14}$$

Il en résulte que

$$\Phi(\alpha^{N-1} \bowtie a)(z) = e^{\alpha z}\Phi(a)((1-\alpha)z)\,, \tag{15}$$

ce qui se traduit par

$$(\alpha^{N-1} \bowtie a)(n+1) = \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^k a(k+1) \tag{16}$$

*Démonstration.* On a

$$e^{(\partial_x+\partial_y-\partial_x\partial_y)z}\Phi(a) = e^{\partial_x(I-\partial_y)z}\Phi(a)e^{(\partial_y)z} = \Phi(a)[x+(I-\partial_y)z]e^{(\partial_y)z}$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi(a \bowtie b)(z) &= (v_x \otimes v_y)\Phi(a)[x+(I-\partial_y)z]e^{(\partial_y)z}\Phi(b)\\ &= (v_x \otimes v_y)\Phi(a)[x+(I-\partial_y)z]\Phi(b)[y+z]\\ &= v_y\left(\Phi(a)[(I-\partial_y)z]\Phi(b)[y+z]\right)\,.\end{aligned}$$

On a vu que $\Phi(\alpha^{x-1})(z) = e^{\alpha z}$ donc

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha^{x-1} \bowtie a)(z) &= v_y\left(\Phi(\alpha^{x-1})[(\mathrm{Id}-\partial_y)z]\Phi(a)[y+z]\right)\\ &= v_y\left(e^{\alpha(\mathrm{Id}-\partial_y)z}\Phi(a)[y+z]\right)\\ &= e^{\alpha z}v_y\left(e^{-\alpha z\partial_y}\Phi(a)[y+z]\right)\\ &= e^{\alpha z}\sum_{n\geq 0}\frac{(-\alpha z)^n}{n!}\partial^n\Phi(a)(z)\\ &= e^{\alpha z}\Phi(a)((1-\alpha)z)\,.\end{aligned}$$

□

**Exemple 13.**

$$(\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie a)(n+1) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a(k+1)$$

**Proposition 10** (Caractérisation des suites invariantes par $D$)**.** Une suite $a \in \mathcal{E}^*$ est invariante par $D$ si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b$$

où $b \in \mathcal{E}^*$ est telle que $b(2k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

*Démonstration.* On a

$$D(a) = a \Leftrightarrow \Phi(D(a)) = \Phi(a) \Leftrightarrow e^z\Phi(a)(-z) = \Phi(a)(z).$$

Posons $\phi(z) = e^{-\frac{z}{2}}\Phi(a(z)$. On a donc $D(a) = a \Leftrightarrow \phi(z) = \phi(-z)$. Dans ce cas, $\phi$ peut toujours s'écrire

$$\phi(z) = \Phi(b)(\frac{z}{2}) \text{ avec } b(2n) = 0 \text{ pour } n \geq 1 \text{ ,}$$

et on a alors

$$\Phi(a(z)) = e^{\frac{z}{2}}\phi(z) = e^{\frac{z}{2}}\Phi(b)(\frac{z}{2}) = \Phi((\frac{1}{2})^{N-1} \bowtie b)(z)\,.$$

□

**Exemple 14.** a) La suite harmonique s'écrit

$$\frac{1}{N} = (\frac{1}{2})^{N-1} \bowtie b$$

avec $b = \frac{1}{N} \bowtie (-1)^{N-1} = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots)$

b) La suite

$$a = \frac{1}{2}(\delta_0 + \mathbf{1}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots)$$

est invariante par $D$. Elle s'écrit

$$a = (\frac{1}{2})^{N-1} \bowtie (1, 0, 1, 0, \cdots)$$

**Remarque 4.** On comparera le critère d'invariance précédent avec celui donné par Sun (cf. [10] Corollary 3.3 (a)).

**Remarque 5** (Sommation d'Euler des séries)**.** Pour $q > 0$, on définit la suite $a^{(q)}$ par

$$a^{(q)}(n+1) = \frac{1}{(q+1)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}a(k+1) \quad (n \geq 0)\,.$$

D'après Hardy, on dit que la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ est (E,$q$) sommable si la série $\sum_{n\geq 1} a^{(q)}(n)$ converge et on pose

$$\sum_{n\geq 1}^{(E,q)} a(n) := \frac{1}{q+1}\sum_{n=0}^{\infty} a^{(q)}(n+1)$$

D'après (15), on a l'interprétation suivante de $a^{(q)}$ :

$$a^{(q)} = \alpha^{N-1} \bowtie a \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{q}{q+1}\,.$$

On obtient ainsi une reformulation du théorème de Hardy (cf. [5] p. 178-179) :

**Théorème.** *Si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ est convergente alors elle est (E,q) sommable et on a*

$$\frac{1}{q+1}\sum_{n=1}^{+\infty}((\frac{q}{q+1})^{N-1} \bowtie a)(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)\,.$$

### 3.4 Harmonicité

**Théorème 2.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation*

$$\frac{1}{N} \bowtie a = \frac{1}{N} S(a) \tag{17}$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que $D(\frac{1}{N} \bowtie a) = D(\frac{1}{N} S(a))$. Or, par (5), on a $D(\frac{1}{N} S(a)) = \frac{1}{N} D(a) = D(\frac{1}{N}) D(a) = D(\frac{1}{N} \bowtie a)$. □

**Corollaire 5.** Pour tout entier $k \geq 1$,

$$D(\frac{1}{N^{k+1}}) = \frac{1}{N} SD(\frac{1}{N^k})$$

*Démonstration.*

$$D(\frac{1}{N^{k+1}}) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(k+1)} = \frac{1}{N} \bowtie \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} = \frac{1}{N} S(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k}) = \frac{1}{N} SD(\frac{1}{N^k}) .$$

□

**Exemple 15.**

$$\frac{1}{N} \bowtie \frac{1}{N} = D(\frac{1}{N^2}) = \frac{1}{N} H$$

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie 3} = D(\frac{1}{N^3}) = \frac{1}{N} S(\frac{1}{N} H) = \frac{1}{2N} (H^2 + H^{(2)})$$

**Notation.** Pour tout $p \in \mathbb{R} - \{-1, -2, \cdots\}$, on note $p! = \Gamma(p+1)$ ; on note $\Gamma(N+p)$ la suite $n \mapsto \Gamma(n+p)$ . On pose

$$(N)_p := \frac{\Gamma(N+p)}{\Gamma(N)} .$$

Pour $p$ entier naturel, on a $(N)_0 = \mathbf{1}$, et pour $p \geq 1$

$$(N)_p = N(N+1) \cdots (N+p-1) .$$

Le théorème 2 se généralise alors de la manière suivante :

**Théorème 3.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et tout réel $p \neq -1, -2, -3, \cdots$, on a la relation*

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a = \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!} a\right) \tag{18}$$

*ce qui se traduit, pour $p$ entier $\geq 1$, par*

$$(\frac{p!}{N(N+1)\dots(N+p)} \bowtie a)(n) = \frac{p!}{n(n+1)\dots(n+p)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)\dots(k+p-1)}{p!} a(k)$$

*Démonstration.* En appliquant (7) avec $p = \alpha - 1$, on obtient

$$D(\frac{1}{N+p}) = \frac{(N-1)!}{(p+1)_N} = \frac{\Gamma(N)\Gamma(p+1)}{\Gamma(N+p+1)} = \frac{p!}{(N)_{p+1}}$$

par conséquent,

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a = D(\frac{1}{N+p} D(a))$$

Posons

$$f_{p+1}(z) = \Phi(D(\frac{1}{N+p} D(a))(z)$$

On a

$$f_{p+1}(z) = e^z \sum_{n \geq 0} (D(a))(n+1) \frac{1}{n+1+p} \frac{(-z)^n}{n!}$$

et donc

$$e^{-z} z^{p+1} f_{p+1}(z) = \sum (D(a))(n+1)(-1)^n \frac{1}{n+1+p} \frac{z^{n+p+1}}{n!}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} e^{-z} z^{p+1} f_{p+1}(z) &= \int_0^z t^p \sum (D(a))(n+1)(-1)^n \frac{t^n}{n!} dt \\ &= \int_0^z e^{-t} t^p \sum a(n+1) \frac{t^n}{n!} dt \\ &= \int_0^z e^{-t} t^p \Phi(a)(t) dt \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_{p+1}(z) = e^z \frac{1}{z^{p+1}} \int_0^z e^{-t} t^p \Phi(a)(t) dt\,.$$

Par le changement de variable $u = tz$ on a aussi

$$\begin{aligned} f_{p+1}(z) &= \int_0^1 e^{z(1-u)} u^p \Phi(a)(uz) du \\ &= \sum_{k,l} \frac{z^k}{k!} \frac{z^l}{l!} a(k+1) \int_0^1 (1-u)^l u^{p+k} du \\ &= \sum_{k,l} \frac{z^k}{k!} \frac{z^l}{l!} a(k+1) \frac{l!(p+k)!}{(p+k+l+1)!} \\ &= \sum_n \frac{z^n}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!} a(k+1) \frac{l!(p+k)!}{(p+k+l+1)!} \\ &= \sum_n \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{(p+k)!}{(p+n+1)!} a(k+1) \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \frac{(p+k)!}{(p+n+1)!} a(k+1) = \frac{1}{(n+1)\dots(n+1+p)} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)\dots(k+p-1)a(k)$$

ce qui montre que

$$\Phi(\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a) = \Phi(\frac{1}{(N)_{p+1}} S((N)_p\, a)) = \Phi(\frac{p!}{(N)_{p+1}} S(\frac{(N)_p}{p!} a))$$

□

**Exemple 16.** Pour $p = 1$, on a

$$\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a = \frac{1}{N(N+1)} S(Na)$$

c'est à dire

$$(\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} ka(k)$$

On en déduit que

$$(\frac{1}{N+1} \bowtie a)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)a(k)\,.$$

**Corollaire 6.** Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et pour tout entier $p \geq 0$,

$$D\left(\frac{1}{(N)_{p+1}} S(a)\right) = \frac{1}{(N)_{p+1}} S^p(D(a)) \tag{19}$$

*Démonstration.* Par récurrence sur $p$. Pour $p = 0$, c'est la formule (5). En écrivant $(N)_{p+1} = (N+p)\,(N)_p$, on obtient

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{(N)_{p+1}} S(a)\right) &= D(\frac{1}{N+p}) \bowtie D\left(\frac{1}{(N)_p} S(a)\right) \\ &= \frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie \frac{1}{(N)_p} S^{p-1}(D(a)) \\ &= \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!} \frac{1}{(N)_p} S^{p-1}(D(a))\right) \\ &= \frac{1}{(N)_{p+1}} S^p(D(a))\,. \end{aligned}$$

□

**Exemple 17.** a) $a = \dfrac{1}{N}$ et $p = 1$ :

$$D\left(\frac{H}{N(N+1)}\right) = \frac{H}{N(N+1)}\,.$$

b) $a = \dfrac{1}{N}$ et $p = 2$ :

$$D\left(\frac{H}{N(N+1)(N+2)}\right) = \frac{S(H)}{N(N+1)(N+2)} = \frac{H}{N(N+2)} - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\,.$$

c) $a = \dfrac{1}{N^2}$ et $p = 1$ :

$$D\left(\frac{H^{(2)}}{N(N+1)}\right) = \frac{1}{N(N+1)}S(\frac{1}{N}H) = \frac{H^2}{2N(N+1)} + \frac{H^{(2)}}{2N(N+1)}\,.$$

**Corollaire 7.** Pour tout réel $p \neq -1, -2, \cdots$,

$$D(\frac{1}{(N+p)^2}) = \frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie \frac{p!}{(N)_{p+1}} = \frac{p!}{(N)_{p+1}}S(\frac{1}{N+p})\,.$$

*Démonstration.* Par (18),

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie \frac{p!}{(N)_{p+1}} = \frac{p!}{(N)_{p+1}}S\left(\frac{(N)_p}{p!}\frac{p!}{(N)_{p+1}}\right) = \frac{p!}{(N)_{p+1}}S(\frac{1}{N+p})\,.$$

$\square$

**Exemple 18.** a) $p = 1$,

$$D(\frac{1}{(N+1)^2}) = \frac{1}{N(N+1)}S(\frac{1}{N+1}) = \frac{H}{N(N+1)} - \frac{1}{(N+1)^2}$$

ce qui peut se réécrire :

$$\frac{H}{N(N+1)} = \frac{1}{(N+1)^2} + D(\frac{1}{(N+1)^2})\,.$$

b) $p = -\dfrac{1}{2}$

$$D(\frac{1}{(N-\frac{1}{2})^2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(N)_{\frac{1}{2}}}S(\frac{1}{N-\frac{1}{2}})$$

ce qui peut se réécrire :

$$D(\frac{1}{(2N-1)^2}) = \frac{2^{2N-1}}{N\binom{2N}{N}}\,O$$

c'est à dire (cf. [1] p. 293)

$$D(\frac{1}{(2N-1)^2})(n) = \frac{2^{2n-1}}{n\binom{2n}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\,.$$

**Remarque 6.** Plus généralement, on peut montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$D(\frac{1}{(N+p)^{k+1}}) = \frac{N!}{N(p+1)_N} P_k(S_p^{(1)}, \ldots, S_p^{(k)})$$

avec pour $1 \leq m \leq k$ et $n \geq 1$,

$$S_p^{(m)}(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(p+j)^m}$$

et où les $P_k(X_1, ..., X_k)$ sont les polynomes de Bell modifiés (cf. [3], [4]) définis par la fonction génératrice

$$\exp(\sum_{m \geq 1} X_m \frac{x^m}{m}) = \sum_{k \geq 0} P_k(X_1, ..., X_k)\, x^k\,.$$

En particulier, pour $p = 0$,

$$D(\frac{1}{N^{k+1}}) = \frac{1}{N} P_k(H, H^{(2)}, \ldots, H^{(k)})$$

et pour $p = -\frac{1}{2}$,

$$D(\frac{1}{(2N-1)^{k+1}}) = \frac{2^{2N-1}}{N\binom{2N}{N}} P_k(O, O^{(2)}, \ldots, O^{(k)})\,.$$

## 4 Les sommes harmoniques

On rappelle la propriété d'harmonicité (17) : $\frac{1}{N} \bowtie a = \frac{1}{N} S(a)$. Cette propriété justifie la généralisation suivante.

**Définition 9.** Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier naturel $k$, la *somme harmonique $k$-ième* de $a$ notée $S^{(k)}(a)$ par la formule

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a = \frac{1}{N} S^{(k)}(a) \tag{20}$$

**Exemple 19.**

$$D(\frac{1}{N^{k+1}}) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie (k+1)} = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie \frac{1}{N} = \frac{1}{N} S^{(k)}(\frac{1}{N})\,. \tag{21}$$

D'où

$$S^{(k)}(\frac{1}{N}) = ND(\frac{1}{N^{k+1}})$$

*i.e.*

$$S^{(k)}(\frac{1}{N})(n) = nD(\frac{1}{N^{k+1}})(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k}\,.$$

Plus généralement,

**Proposition 11.** Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et pour $k \geq 1$, on a l'identité

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m) \,. \tag{22}$$

*Démonstration.* Par définition de la somme harmonique $k$-ième,

$$\frac{1}{N} S^{(k)}(a) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a = D(\frac{1}{N^k} D(a))$$

d'où

$$S^{(k)}(a) = N D(\frac{1}{N^k} D(a))$$

ce qui se traduit par

$$S^{(k)}(a)(n) = n D(\frac{1}{N^k} D(a))(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m).$$

□

On va à présent donner une autre expression des sommes harmoniques.

**Proposition 12.** Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a $S^{(0)}(a)(n) = na(n)$ et la relation de récurrence :

$$S^{(k+1)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} S^{(k)}(a)(m). \tag{23}$$

Il en résulte que $S^{(1)}(a) = S(a)$, et pour $k \geq 2$,

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} a(n_k) \,. \tag{24}$$

*Démonstration.* Par (17), on peut écrire

$$\frac{1}{N} S^{(k+1)}(a) := \left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie(k+1)} \bowtie a = \frac{1}{N} \bowtie \left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a\right) = \frac{1}{N} S \left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a\right) .$$

On en déduit la relation de récurrence

$$S^{(k+1)}(a) = S \left(\left(\frac{1}{N}\right)^{\bowtie k} \bowtie a\right) = S \left(\frac{1}{N} S^{(k)}(a)\right) ,$$

qui se traduit par (23). La formule (24) s'en déduit aussitôt par récurrence. □

**Exemple 20.**

$$S^{(0)}(\frac{1}{N}) = \mathbf{1} \quad ; \quad S^{(1)}(\frac{1}{N}) = H \quad ; \quad S^{(2)}(\frac{1}{N}) = S(\frac{1}{N}H) = \frac{1}{2}(H^2 + H^{(2)})$$

**Théorème 4.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, et pour $k \geq 2$, on a l'identité*

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} a(n_k) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m). \tag{25}$$

*Démonstration.* La formule (25) résulte des formules (22) et (24) par identification □

**Corollaire 8** (Formule de Dilcher généralisée)**.** Pour $k \geq 1$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_k} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} ,$$

et pour $q \geq 1$ et $k \geq 1$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} \frac{1}{n_k^{q+1}} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} \sum_{m \geq m_1 \geq \cdots \geq m_q \geq 1} \frac{1}{m_1 \ldots m_q} . \tag{26}$$

*Démonstration.* On applique successivement (25) à la suite $a = \dfrac{1}{N}$ (on a $D(a) = a$), puis à la suite $a = \dfrac{1}{N^{q+1}}$ avec $q \geq 1$, on a $D(a) = \dfrac{1}{N} S^{(q)}(\dfrac{1}{N})$. □

**Exemple 21.** a) $a = \dfrac{1}{N^2}$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} \frac{1}{n_k^2} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{H(m)}{m^k}$$

b) $a = \dfrac{1}{2N-1}$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} \frac{1}{2n_k - 1} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{2^{2m-1}}{m^k \binom{2m}{m}}$$

c) $a = \dfrac{1}{(2N-1)^2}$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} \frac{1}{(2n_k - 1)^2} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{2^{2m-1} O(m)}{m^k \binom{2m}{m}}$$

# 5 La Transformation d'Euler

## 5.1 Transformation d'Euler formelle dans $\mathbb{C}[[z]]$

**Théorème 5.** *Soit $a \in \mathcal{E}^*$, on a la relation dans* $\mathbb{C}[[z]]$

$$\sum_{n\geq 1} D(a)(n)z^n = -\sum_{n\geq 1} a(n)(\frac{z}{z-1})^n \tag{27}$$

*Démonstration.* Par définition de $D(a)$, on a

$$\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^n = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a(k+1)\,.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} z^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a(k+1) &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k a(k+1)z^k \sum_{n\geq k}\binom{n}{k}z^{n-k} \\ &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k a(k+1)z^k(1-z)^{-k-1} \\ &= \frac{1}{1-z}\sum_{k\geq 0}(-1)^k a(k+1)(\frac{z}{1-z})^k \\ &= \frac{1}{1-z}\sum_{k\geq 0} a(k+1)(\frac{z}{z-1})^k\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} = \frac{z}{1-z}\sum_{k\geq 0} a(k+1)(\frac{z}{z-1})^k$$

qui est la relation cherchée. □

**Exemple 22.** D'après les exemples 17 et 18 a), on a les relations suivantes :

a)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H(n)}{n(n+1)}z^n = -\sum_{n\geq 1}\frac{H(n)}{n(n+1)}(\frac{z}{z-1})^n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)^2}z^n - \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+1)^2}(\frac{z}{z-1})^n$$

b)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{H(n)}{n(n+2)}z^n - \sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{(n+1)(n+2)} = -\sum_{n\geq 1}\frac{H(n)}{n(n+1)(n+2)}(\frac{z}{z-1})^n\,.$$

c)

$$\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{(H(n))^2}{n(n+1)}z^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{H^{(2)}(n)}{n(n+1)}z^n = -\sum_{n\geq 1}\frac{H^{(2)}(n)}{n(n+1)}(\frac{z}{z-1})^n$$

**Corollaire 9.** Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et tout entier naturel $k$, on a l'identité

$$\sum_{n\geq 1} \frac{D(a)(n)}{n^k} z^n = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} S^{(k)}(a)(n)(\frac{z}{z-1})^n \,, \tag{28}$$

*Démonstration.* D'après (20), on a $\frac{1}{N^k} D(a) = D(\frac{1}{N} S^{(k)}(a))$. La formule (28) résulte alors de (27).

□

**Exemple 23.** a) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{N}$, on obtient pour $k \geq 1$,

$$\mathrm{Li}_{k+1}(z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n\geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_k} (\frac{z}{z-1})^n \tag{29}$$

avec (formellement)

$$\mathrm{Li}_{k+1}(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{k+1}} z^n \,.$$

b) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{N^2}$, on obtient pour $k \geq 2$,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{H(n)}{n^{k+1}} z^n = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n\geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{n_k^2} (\frac{z}{z-1})^n \,. \tag{30}$$

c) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{2N-1}$, on obtient pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^{k+1}} z^n = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n\geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{2n_k - 1} (\frac{z}{z-1})^n \,. \tag{31}$$

d) En appliquant (28) avec $a = \frac{1}{(2N-1)^2}$, on obtient pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n^{k+1}} z^n = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sum_{n\geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_{k-1}} \frac{1}{(2n_k - 1)^2} (\frac{z}{z-1})^n \,. \tag{32}$$

## 5.2 Transformation d'Euler analytique

**Théorème 6.** *Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$. Si la série $\sum_{n\geq 1} a(n) z^n$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$ alors la série $\sum_{n\geq 1} D(a)(n) z^n$ est convergente dans le disque ouvert $\mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$ et on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$ :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n) z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} a(n) (\frac{z}{z-1})^n$$

*L'application $z \mapsto \dfrac{z}{z-1}$ étant involutive, il en résulte que si la série $\sum_{n\geq 1} D(a)(n)z^n$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$ alors la série $\sum_{n\geq 1} a(n)z^n$ est convergente dans le disque ouvert $\mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$ et on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a(n)z^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n)(\frac{z}{z-1})^n$$

*Démonstration.* Pour $z \in \mathbf{D}(0,1)$, posons $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n+1)z^n$. On a pour tout $0 < r < 1$ et pour tout entier $k \geq 0$

$$a(k+1) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)} \frac{A(u)}{u^{k+1}}du$$

où $\mathbf{C}(0,r)$ est le cercle paramétré par $t \mapsto re^{it}$, avec $t \in [0,2\pi]$. On en déduit que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$D(a)(n+1) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)} (1-\frac{1}{u})^n \frac{A(u)}{u}du\,.$$

On va montrer que

$$\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r)} \sum_{n\geq 0}(z(1-\frac{1}{u}))^n A(u)\frac{z}{u}du\,.$$

Pour cela il suffit que la série $\sum_{n\geq 0}(z(1-\dfrac{1}{u}))^n A(u)\dfrac{z}{u}$ soit normalement convergente sur le cercle $\mathbf{C}(0,r)$, ce qui est le cas si

$$|z| < \left|\frac{u}{u-1}\right|\,.$$

Or si $u \in \mathbf{C}(0,r)$, on a $\dfrac{u}{u-1} \in \mathbf{C}(\dfrac{r^2}{r^2-1},\dfrac{r}{1-r^2})$, donc $\left|\dfrac{u}{u-1}\right| \leq \dfrac{r}{r+1}$. On en déduit que si $|z| < \dfrac{r}{r+1}$ alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)} \sum_{n\geq 0}(z(1-\frac{1}{u}))^n A(u)\frac{z}{u}du \\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)} \frac{z}{uz-z-u}A(u)du\,.\end{aligned}$$

Comme $0 < r < 1$, ceci prouve que la série $\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1}$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0,\dfrac{1}{2})$. D'autre part,

$$\frac{z}{uz-z-u}A(u) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{1-\dfrac{1}{u}\dfrac{z}{z-1}}\frac{A(u)}{u} = \sum_{n\geq 0}(\frac{z}{z-1})^{n+1}\frac{A(u)}{u^{n+1}}\,.$$

Cette dernière série converge normalement sur $C(0,r)$ si

$$\left|\frac{z}{z-1}\right| < |u| = r$$

ce qui est le cas si $z \in \mathbf{D}(\frac{r^2}{r^2-1}, \frac{r}{1-r^2})$.

En conclusion, si $z \in \mathbf{D}(\frac{r^2}{r^2-1}, \frac{r}{1-r^2}) \cap \mathbf{D}(0, \frac{r}{r+1}) = \mathbf{D}(0, \frac{r}{r+1})$, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} D(a)(n+1)z^{n+1} &= \sum_{n\geq 0}(\frac{z}{z-1})^{n+1}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbf{C}(0,r)}\frac{A(u)}{u^{n+1}}du \\ &= -\sum_{n\geq 0}(\frac{z}{z-1})^{n+1}a(n+1)\,.\end{aligned}$$

Comme $0 < r < 1$, ceci prouve qu'on a l'égalité dans le disque $\mathbf{D}(0, \frac{1}{2})$. □

Par le Lemme d'Abel sur les séries entières, on en déduit du théorème précédent le corollaire suivant.

**Corollaire 10.** 1) Si les séries $\sum_{n\geq 1} a(n)(-1)^n$ et $\sum_{n\geq 1} D(a)(n)(\frac{1}{2})^n$ convergent, alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} D(a)(n)(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a(n)\,.$$

2) Si les séries $\sum_{n\geq 1} D(a)(n)(-1)^n$ et $\sum_{n\geq 1} a(n)(\frac{1}{2})^n$ convergent, alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}D(a)(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a(n)(\frac{1}{2})^n\,.$$

**Exemple 24.** a) D'après l'exemple 22 a), on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(n)}{2^n n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}H(n)}{n(n+1)} = 2\mathrm{Li}_2(\frac{1}{2}) + \mathrm{Li}_2(-1) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \log^2(2) \quad \text{(cf. [1])}.$$

b) Pour $a = \frac{1}{2N-1}$, on a $D(a) = \frac{1}{N}\frac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n\binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}\,,$$

et aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{n\binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)} = \frac{\log(3+2\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}\,.$$

c) Pour $a = \dfrac{1}{(2N-1)^2}$, on a $D(a) = \dfrac{1}{N}\dfrac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}O$, d'où

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\frac{O(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} = G.$$

On retrouve ainsi la formule de Ramanujan pour la constante de Catalan (cf. [1], p. 293).

**Corollaire 11.** Si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)z^n$ est convergente dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$, alors on a pour tout $z \in \mathbf{D}(0,\frac{1}{2})$ et pour $k \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(a)(n)}{n^k}z^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S^{(k)}(a)(n)(\frac{z}{z-1})^n\,. \tag{33}$$

En particulier, pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(a)(n)}{n}z^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}S(a)(n)(\frac{z}{z-1})^n\,. \tag{34}$$

De plus, si les séries $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{D(a)(n)}{n^k}\dfrac{1}{2^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}S^{(k)}(a)(n)(-1)^n$ convergent, alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D(a)(n)}{2^n n^k}\,. \tag{35}$$

*Démonstration.* Si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)z^n$ converge dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$, alors il en est de même de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}S^{(k)}(a)(n)z^n$. Cela résulte de la relation de récurrence (cf. (23)) :

$$\frac{1}{N}S^{(k+1)}(a) = \frac{1}{N}S(\frac{1}{N}S^{(k)}(a))\,,$$

et du fait que si une série $\sum_{n\geq 1} b(n)z^n$ converge dans le disque $\mathbf{D}(0,1)$, alors il en est de même de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}S(b)(n)\,z^n$. On peut alors appliquer le Théorème 6 car $D(\dfrac{1}{N}S^{(k)}(a)) = \dfrac{1}{N^k}D(a)$. □

**Exemple 25.** a) Pour $a = \dfrac{1}{N}$, on a $D(a) = a$, d'où pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H(n)}{n} = \mathrm{Li}_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\log^2(2) \quad \text{(cf. [1])},$$

et pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{H(m)}{m} = \mathrm{Li}_3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}(\log 2)^3 - \frac{1}{2}\zeta(2)\log 2 + \frac{7}{8}\zeta(3) \quad \text{(cf. [1])}.$$

b) Pour $a = \dfrac{1}{N^2}$, on a $D(a) = \dfrac{1}{N} H$, d'où pour $k = 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(n)}{2^n n} = -\mathrm{Li}_2(-1) = \frac{1}{2}\zeta(2)\,,$$

pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{H^{(2)}(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(n)}{2^n n^2} = \zeta(3) - \frac{1}{2}\zeta(2)\log 2 \quad \text{(cf. [1])},$$

et pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{H^{(2)}(m)}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(n)}{2^n n^3}\,.$$

c) Pour $a = \dfrac{1}{2N-1}$, on a $D(a) = \dfrac{1}{N} \dfrac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}}$, d'où pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{O(n)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \binom{2n}{n}} = \frac{\pi^2}{16} \quad \text{(cf. [7])},$$

pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{O(m)}{m} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3 \binom{2n}{n}}\,,$$

pour $k = 2$ et $z = -\dfrac{1}{4}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^{n-1}} \sum_{m=1}^{n} \frac{O(m)}{m} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} = \zeta(3) \quad \text{(cf. [1], [7])}.$$

d) Pour $a = \dfrac{1}{(2N-1)^2}$, on a $D(a) = \dfrac{1}{N} \dfrac{2^{2N-1}}{\binom{2N}{N}} O$, d'où pour $k = 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} O^{(2)}(n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n^2}\,,$$

pour $k = 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{O^{(2)}(m)}{m} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O(n)}{n^3}$$

pour $k = 2$ et $z = -\dfrac{1}{4}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^{n-1}} \sum_{m=1}^{n} \frac{O^{(2)}(m)}{m} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} O(n)\,.$$

# Références


[1] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part I*, Springer Verlag, New York, 1985.

[2] K. Boyadzhiev, Harmonic number identities via Euler's transform, *Journal of Integer Sequences*, **12** (2009), Article 09.6.1.

[3] B. Candelpergher, M.-A. Coppo, *A new class of indentities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values*, hal-00495767, to appear.

[4] P. Flajolet and R. Sedgewick, Mellin Transforms and Asymptotics : Finite differences and Rice's integrals, *Theoretical Computer Science*, **144** (1995), 101-124.

[5] G. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, Clarendon Press, 1973.

[6] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1974.

[7] D. H. Lehmer, Interesting series involving the central binomial coefficient, *Amer. Math. Monthly*, **92** (1985), 449-457.

[8] D. Loeb, G.-C. Rota, Formal power series of logarithmic type, *Advances in Math.*, **75** (1989)

[9] S. Roman, The logarithmic binomial formula, *Amer. Math. Monthly*, **99** (1992), 641-648.

[10] Z.-H. Sun, Invariant sequences under binomial transformation, *Fibonacci Quart.*, **39** (2001), 324-333.