HAL
archives-ouvertes.fr

Relations entre les sommes d'Euler de poids fixé et les valeurs de zêta

Marc-Antoine Coppo

▶ To cite this version:

Marc-Antoine Coppo. Relations entre les sommes d'Euler de poids fixé et les valeurs de zêta. Article d'exposition. 2011. <hal-00499548v9>

HAL Id: hal-00499548
https://hal.univ-cotedazur.fr/hal-00499548v9

Submitted on 22 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Relations entre les sommes d'Euler de poids fixé et les valeurs de zêta

Marc-Antoine Coppo
Université Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.A. Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2

Marc-Antoine.COPPO@unice.fr

Article d'exposition
2011

Résumé

Dans cet article, on montre comment déduire d'une remarquable formule sommatoire d'Ohno une relation non-triviale entre les sommes d'Euler de poids fixé k et $\zeta(k)$.

Abstract

In this article, we show how to derive from a deep sum formula of Ohno a non-trivial relation between Euler sums of fixed weight k and $\zeta(k)$.

Mathematical Subject Classification (2000) : 11-02, 11M06, 11M41.

1 Introduction

On sait depuis la seconde moitié du dix-neuvième siècle que la fonction ζ de Riemann peut être représentée par la transformée de Mellin normalisée

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt \quad \text{pour } \Re(s) > 1.$$

Beaucoup plus récemment est apparue une intéressante généralisation de ζ sous la forme de la fonction ξ_k définie pour $k \geq 1$ par

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\, dt \qquad \text{pour } \Re(s) > 0\,,$$

où Li_k désigne le k-ième polylogarithme $\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^k}$ (cf. [1], [3], [8]) . Pour $k = 1$, $\xi_1(s)$ n'est autre que $s\zeta(s+1)$. On montre par une méthode standard pour les transformées de Mellin normalisées ([9] 6.7) que la fonction ξ_k se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction entière de s.

Les valeurs de ξ_k sur les entiers positifs ont des relations étroites avec les valeurs de ζ : on a ainsi $\xi_1(k) = k\zeta(k+1)$ et $\xi_k(1) = \zeta(k+1)$. Plus profondément, Ohno (cf. [8]) a démontré la remarquable identité suivante :

$$\sum_{m=1}^{k-1} \xi_{k-m}(m) = 2(k-1)(1-2^{1-k})\zeta(k)$$

que nous appellerons dans la suite *formule sommatoire d'Ohno.*

On montre dans cet article que les valeurs de ξ_k aux entiers positifs peuvent s'exprimer sous la forme suivante

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})\,,$$

où $P_m(x_1, \ldots, x_m)$ désigne le m-ième polynôme de Bell modifié défini par la fonction génératrice

$$\exp(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{z^k}{k}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x_1, \ldots, x_m)\, z^m\,,$$

et où $H_n, H_n^{(2)}, \cdots, H_n^{(m)}$ sont les nombres harmoniques. Nous appelons cette identité la *formule de Hasse* parce qu'elle prolonge naturellement une relation connue pour les valeurs de ζ dont l'origine remonte à Hasse (cf. [3], [7]). L'intérêt de cette expression de $\xi_k(m)$ est de permettre une réécriture de la formule d'Ohno sous la forme suivante :

$$\sum_{m=1}^{k-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) = \Big[2(k-1)(1-2^{1-k}) - 1\Big]\, \zeta(k) \qquad (*)$$

ce qui conduit, en décomposant chaque P_m en une somme de monômes, à une intéressante relation entre les *sommes d'Euler* de poids k et $\zeta(k)$. En appliquant cette formule dans les cas les plus simples $k = 3$ et $k = 4$, on retrouve des relations connues telles que

$$2\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} \qquad \text{(Euler)}$$

et

$$\frac{17}{4}\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2}$$

Cependant, la relation $(*)$ ne redonne des résultats déjà connus que pour $k \leq 6$ (voir Exemple 4 et Remarque 2).

2 Polynômes de Bell modifiés

Définition 1. Les *polynômes de Bell modifiés* (cf. [3], [4], [5]) sont les polynômes P_m definis pour tout entier naturel m par la fonction génératrice

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1} x_k \frac{z^k}{k}\right) = 1 + \sum_{m\geq 1} P_m(x_1, ..., x_m)\, z^m\,. \tag{1}$$

Une expression explicite de P_m est donnée par

$$P_m(x_1, ..., x_m) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots=m} \frac{1}{k_1!k_2!k_3!\ldots} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{k_2} \left(\frac{x_3}{3}\right)^{k_3} \ldots \tag{2}$$

On peut également calculer récursivement les P_m au moyen de la relation $P_0 = 1$ et

$$mP_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} x_k\, P_{m-k}(x_1, \ldots, x_{m-k}) \quad (m \geq 1)\,.$$

Exemple 1. Pour $0 \leq m \leq 6$, on a ainsi

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 \\
P_1 &= x_1 \\
P_2 &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2 \\
P_3 &= \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\
P_4 &= \frac{1}{24}x_1^4 + \frac{1}{4}x_1^2x_2 + \frac{1}{8}x_2^2 + \frac{1}{3}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\
P_5 &= \frac{1}{120}x_1^5 + \frac{1}{12}x_1^3x_2 + \frac{1}{6}x_1^2x_3 + \frac{1}{8}x_1x_2^2 + \frac{1}{4}x_1x_4 + \frac{1}{6}x_2x_3 + \frac{1}{5}x_5
\end{aligned}$$

Proposition 1. *Pour tout entier naturel m et tout entier $n \geq 1$, on a l'identité*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} \frac{t^m}{m!} dt = \frac{P_m(H_n, \ldots, H_n^{(m)})}{n}\,, \tag{3}$$

avec

$$H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m} \quad \textit{et} \quad H_n = H_n^{(1)}\,.$$

Démonstration. D'une part la classique relation eulérienne (cf. [9])

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,,$$

en substituant $u = e^{-t}$, $x = 1 - z$ et $y = n + 1$, permet d'obtenir

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - e^{-t})^n e^{tz} dt = \frac{n!}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)} \,.$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)} &= \frac{n!}{(n+1)!} \times \prod_{j=0}^{n} (1 - \frac{z}{j+1})^{-1} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \exp(-\sum_{j=0}^{n} \ln(1 - \frac{z}{j+1})) \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \exp(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k(j+1)^k}) \\
&= \frac{1}{(n+1)} \exp(\sum_{k=1}^{\infty} H_{n+1}^{(k)} \frac{z^k}{k}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(H_{n+1}^{(1)}, \dots, H_{n+1}^{(m)})}{n+1} \, z^m \qquad \text{(par (1))}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} e^{tz} dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(H_n^{(1)}, \dots, H_n^{(m)})}{n} \, z^m \,.$$

La formule (3) en resulte par identification du terme en z^m. $\square$

3 Valeurs de la fonction ξ_k

Proposition 2. *Soit*

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} f(t)\, dt$$

une transformée de Mellin normalisée avec :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - e^{-t})^{n-1}$$

On suppose que les coefficients a_n vérifient la condition $|a_n| = O(\frac{1}{n})$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1) L'intégrale $F(s)$ converge pour $\Re(s) > 0$.

2) Si m est un entier naturel, alors :

$$F(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)})}{n} \tag{4}$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|(1-e^{-t})^{n-1} \leq C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n} = \frac{Ct}{1-e^{-t}}$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale et autorise la permutation des symboles $\int$ et $\sum$. D'où l'expression

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, dt\,.$$

En posant $s = m+1$ dans l'expression précédente, la formule (4) résulte alors de (3). □

On applique à présent la proposition précédente avec $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, c'est à dire à la fonction

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n^k} = \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}\,,$$

on obtient alors immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3 (Formule de Hasse pour ξ_k)**.** *Pour $k \geq 1$ et $\Re(s) > 0$, soit*

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\, dt$$

Pour tout entier naturel m, on a

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})\,. \tag{5}$$

Remarque 1 (lien avec la formule d'Ohno pour ξ_k)**.** Soit

$$Q(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{z}{j})$$

On a vu que

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(H_n^{(1)}, \ldots, H_n^{(m)})\, z^m$$

et, d'autre part, en développant le produit en série,

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_m} \right) z^m$$

D'où, par identification,

$$P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_m}\,,$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\xi_k(m+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_m} \\ &= \sum_{n \geq n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n^{k+1} n_1 n_2 \ldots n_m}\end{aligned}$$

qui est la formule d'Ohno (cf. [8], Proposition 1).

Exemple 2.

$$\xi_{k-1}(1) = \zeta(k)\,,$$

$$\xi_{k-2}(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{k-1}}$$

$$\xi_{k-3}(3) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^{k-2}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^{k-2}}\,,$$

$$\xi_{k-4}(4) = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^{k-3}} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^{k-3}} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^{k-3}}\,,$$

$$\xi_{k-5}(5) =$$
$$\frac{1}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^4}{n^{k-4}} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2 H_n^{(2)}}{n^{k-4}} + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n^{(2)})^2}{n^{k-4}} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(3)}}{n^{k-4}} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^{k-4}}\,.$$

4 Relation entre les sommes d'Euler de poids k

Définition 2. On appelle somme d'Euler de poids k (cf. [2], [6]) une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(\omega_1)} \ldots H_n^{(\omega_j)}}{n^q}$$

avec $q \geq 2, j \geq 1, \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_j$ et

$$\omega_1 + \ldots \omega_j + q = k$$

On rappelle la *formule sommatoire d'Ohno* (cf. [8], Proposition 2) :

$$\sum_{m=1}^{k-1} \xi_{k-m}(m) = 2(k-1)(1-2^{1-k})\zeta(k)$$

qui, en prenant en compte l'égalité $\xi_{k-1}(1) = \zeta(k)$, peut s'écrire, grâce à la formule (5) précédente, sous la forme suivante :

Théorème 1. *Pour tout entier $k \geq 3$ et $m \geq 1$, on a la relation*

$$\sum_{m=1}^{k-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)}) = \left[2(k-1)(1-2^{1-k}) - 1\right] \zeta(k) \tag{6}$$

En décomposant chaque P_m comme une somme de $p(m)$ monômes (où $p(m)$ est le nombre de partitions de m), ceci se traduit par une relation entre les

$$N_k = \sum_{m=1}^{k-2} p(m)$$

sommes d'Euler de poids k et $\zeta(k)$.

Exemple 3. On a

$$N_3 = 1, N_4 = 3, N_5 = 6, N_6 = 11, N_7 = 18.$$

Ce qui correspond aux identités suivantes :

Exemple 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}=2\zeta(3);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}=\frac{17}{4}\zeta(4);$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2}{n^3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}\\&+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^3}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^2}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}=\frac{13}{2}\zeta(5);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2}{n^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^3}{n^3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}\\&+\frac{1}{24}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^4}{n^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2H_n^{(2)}}{n^2}+\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n^{(2)})^2}{n^2}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(3)}}{n^2}\\&+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^2}=\frac{141}{16}\zeta(6);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^6}&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2}{n^5}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^3}{n^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^4}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^4}\\&+\frac{1}{24}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^4}{n^3}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2H_n^{(2)}}{n^3}+\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n^{(2)})^2}{n^3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(3)}}{n^3}\\&+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^3}+\frac{1}{120}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^5}{n^2}+\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^3H_n^{(2)}}{n^2}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2H_n^{(3)}}{n^2}\\&+\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n(H_n^{(2)})^2}{n^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(4)}}{n^2}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}H_n^{(3)}}{n^2}\\&+\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(5)}}{n^2}=\frac{173}{16}\zeta(7).\end{aligned}$$

Remarque 2. Pour $k\leq 6$, les identités précédentes peuvent se déduire de calculs explicites portant sur les sommes d'Euler (cf. [2], [6]). Cependant, pour $k=7$ elle apparaît déjà comme un résultat nouveau.

Références

[1] T. Arakawa, M. Kaneko, Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 189-209.

[2] J. Choi, H. M. Srivastava, Explicit evaluation of Euler and related sums, *Ramanujan J.* **10** (2005), 51-70.

[3] M-A. Coppo, B. Candelpergher, The Arakawa-Kaneko Zeta function, *Ramanujan J.* **22** (2010), 153-162.

[4] B. Candelpergher, M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, to appear in *The Ramanujan J.*

[5] P. Flajolet, R. Sedgewick, Mellin Transforms and Asymptotics : finite differences and Rice's integrals, *Theoretical Computer Science* **144** (1995), 101-124.

[6] P. Flajolet, B. Salvy, Euler sums and contour integral representations, *Experimental Math.* **7** (1998), 15-35.

[7] H. Hasse, Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe, *Mathematische Zeitschrift* **32** (1930), 458-464.

[8] Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values, in Zeta functions, Topology, and Quantum Physics, Dev. Math. **14**, 131-144, Springer, New York, 2005.

[9] E. Zeidler, *Quantum Field Theory I : Basics in Mathematics and Physics*, Springer, Berlin Heidelberg, 2006.