Formule de Hasse pour zêta et relations entre les sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo

Formule de Hasse pour zêta et relations entre les sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo
CNRS-INSMI
Université de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2

Marc-Antoine.COPPO@unice.fr

Article d'exposition
2011

Résumé

Dans cet article, on présente une identité qui étend naturellement la classique formule de Hasse pour la fonction zêta de Riemann à la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko. On montre comment une nouvelle interprétation d'une formule sommatoire d'Ohno permet d'en déduire des relations non triviales entre les sommes d'Euler.

1 Introduction

Il est bien connu (cf. [9] 6.4) que la fonction ζ de Riemann peut être représentée par la transformée de Mellin normalisée

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt \qquad \text{pour } \Re(s) > 1.$$

Plus généralement, il est naturel de considérer pour tout entier $k \geq 1$ la fonction ξ_k définie par la représentation

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\, dt \qquad \text{pour } \Re(s) > 0\,,$$

avec

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \quad (|z| < 1).$$

On montre par une méthode standard pour les transformées de Mellin normalisées ([9] 6.7) que la fonction ξ_k se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction entière de s. On l'appelle la *fonction zêta d'Arakawa-Kaneko* (cf. [1], [4]). Dans le cas le plus simple $k=1$, $\xi_1(s)$ n'est autre que $s\zeta(s+1)$.

On montre par des méthodes élémentaires (cf. Proposition 3) que les valeurs prises par la fonction ξ_k sur les entiers positifs admettent l'expression

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

où $P_m(x_1, \dots, x_m)$ désigne le m-ième polynôme de Bell modifié défini par la fonction génératrice

$$\exp(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{z^k}{k}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x_1, \dots, x_m)\, z^m \,,$$

et où $H_n = H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)}$ sont les nombres harmoniques généralisés

$$H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m} \,.$$

Nous appelons cette identité la *formule de Hasse* pour la fonction ξ_k parce qu'elle prolonge naturellement une formule classique pour les valeurs de ζ dont l'origine remonte à Hasse [1]. Dans le cas particulier $k = m = 1$, on retrouve une célèbre formule d'Euler :

$$\xi_1(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3) \,.$$

L'intérêt principal de cette formule de Hasse est d'engendrer une famille de relations non-triviales entre les *sommes d'Euler* [2]. Il découle en effet d'une formule sommatoire d'Ohno (cf. [8]) la relation

$$\xi_{k-1}(1) + \xi_{k-2}(2) + \cdots + \xi_2(k-2) = (1 - 2^{2-k})\xi_1(k-1) \qquad \text{pour } k \geq 4.$$

Combinée avec la formule de Hasse pour ξ_k, cette relation peut alors se traduire par la remarquable identité suivante :

$$\sum_{m=1}^{k-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)}) + (2^{2-k} + \frac{2-k}{k-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{k-2}(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(k-2)}) = 0 \qquad \text{pour } k \geq 4.$$

1. Les polynômes de Bell n'apparaissent pas explicitement dans la formulation originelle de Hasse (cf. [7] formule (5)).

2. La première étude systématique de ces séries faisant intervenir les nombres harmoniques a été entreprise par Euler en 1771 (cf. [5]).

En appliquant la formule précédente dans les cas les plus simples $k = 4$ et $k = 5$, on obtient respectivement les identités

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} = 0,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} - \frac{5}{48} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^2} - \frac{5}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2} = 0\,.$$

2 Polynômes de Bell évalués sur les nombres harmoniques

Définition 1. Les *polynômes de Bell modifiés* (cf. [2], [4], [6]) sont les polynômes P_m definis pour tout entier naturel m par la fonction génératrice

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1} x_k \frac{z^k}{k}\right) = 1 + \sum_{m\geq 1} P_m(x_1, ..., x_m)\, z^m\,. \tag{1}$$

Une expression explicite de P_m est donnée par

$$P_m(x_1, ..., x_m) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots=m} \frac{1}{k_1!k_2!k_3!\ldots} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{k_2} \left(\frac{x_3}{3}\right)^{k_3} \cdots$$

On peut également calculer récursivement les P_m au moyen de la relation $P_0 = 1$ et

$$mP_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} x_k\, P_{m-k}(x_1, \ldots, x_{m-k}) \quad (m \geq 1)\,.$$

Proposition 1. *Pour tout entier naturel m et tout entier $n \geq 1$, on a l'identité*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} \frac{t^m}{m!} dt = \frac{P_m(H_n, \ldots, H_n^{(m)})}{n}\,, \tag{2}$$

avec

$$H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m} \quad \textit{et} \quad H_n = H_n^{(1)}\,.$$

Démonstration. D'une part la classique relation eulérienne (cf. [9])

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,,$$

en substituant $u = e^{-t}$, $x = 1 - z$ et $y = n + 1$, permet d'obtenir

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^n e^{tz} dt = \frac{n!}{(1-z)(2-z)\ldots(n+1-z)}\,.$$

D'autre part, on a aussi

$$
\begin{aligned}
\frac{n!}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)} &= \frac{n!}{(n+1)!} \times \prod_{j=0}^{n}(1-\frac{z}{j+1})^{-1} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \exp(-\sum_{j=0}^{n}\ln(1-\frac{z}{j+1})) \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \exp(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k(j+1)^k}) \\
&= \frac{1}{(n+1)} \exp(\sum_{k=1}^{\infty} H_{n+1}^{(k)}\frac{z^k}{k}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{P_m(H_{n+1}^{(1)},\dots,H_{n+1}^{(m)})}{n+1}\, z^m \quad \text{(by (1))}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}e^{tz}dt = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{P_m(H_n^{(1)},\dots,H_n^{(m)})}{n}\, z^m\,.$$

La formule (2) en resulte par identification du terme en z^m. $\square$

Exemple 1. Pour les petites valeurs de m, on a ainsi

$$
\begin{aligned}
P_1(H_n) &= H_n \\
P_2(H_n, H_n^{(2)}) &= \frac{(H_n)^2}{2} + \frac{H_n^{(2)}}{2} \\
P_3(H_n, H_n^{(2)}, H_n^{(3)}) &= \frac{(H_n)^3}{6} + \frac{H_nH_n^{(2)}}{2} + \frac{H_n^{(3)}}{3} \\
P_4(H_n, H_n^{(2)}, H_n^{(3)}, H_n^{(4)}) &= \frac{(H_n)^4}{24} + \frac{(H_n)^2H_n^{(2)}}{4} + \frac{(H_n^{(2)})^2}{8} + \frac{H_nH_n^{(3)}}{3} + \frac{H_n^{(4)}}{4}\,.
\end{aligned}
$$

3 Formule de Hasse pour ξ_k

Proposition 2. *Soit*

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}f(t)\,dt$$

une transformée de Mellin normalisée avec :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1-e^{-t})^{n-1}$$

On suppose que les coefficients a_n vérifient la condition $|a_n| = O(\frac{1}{n})$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1) L'intégrale $F(s)$ converge pour $\Re(s) > 0$.

2) Si m est un entier naturel, alors :

$$F(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)})}{n} \tag{3}$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|(1-e^{-t})^{n-1} \leq C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n} = \frac{Ct}{1-e^{-t}}$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale et autorise la permutation des symboles $\int$ et $\sum$. D'où l'expression

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, dt\,.$$

En posant $s = m+1$ dans l'expression précédente, la formule (3) résulte alors de (2). □

On applique à présent la proposition précédente avec $a_n = \frac{1}{n^k}$, c'est à dire à la fonction

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n^k} = \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}\,,$$

on obtient alors immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3 (Formule de Hasse pour ξ_k)**.** *Pour $k \geq 1$ et $\Re(s) > 0$, soit*

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\, dt$$

Pour tout entier naturel m, on a

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)})\,. \tag{4}$$

En particulier,

$$\xi_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = \zeta(k+1)\,.$$

Remarque 1. De $\mathrm{Li}_1(z) = -\ln(1-z)$ découlent les égalités

$$\xi_1(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} (\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}) t\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt = s\zeta(s+1)\,.$$

D'où, pour $k \geq 2$,

$$\xi_1(k-1) = (k-1)\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{k-2}(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(k-2)})\,.$$

Exemple 2 (Formule d'Euler)**.**

$$\xi_1(2) = 2\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2}.$$

Plus généralement, pour $k \geq 2$,

$$\xi_k(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{k+1}} = \frac{1}{2}(k+3)\zeta(k+2) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \zeta(j+1)\zeta(k+1-j) \quad \text{(cf. [5], [3])}$$

4 Relation entre les sommes d'Euler

La *formule sommatoire d'Ohno* (cf. [8] Proposition 2) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\sum_{m=1}^{k-2} \xi_{k-m}(m) = (1 - 2^{2-k})\xi_1(k-1).$$

Comme

$$\xi_{k-1}(1) = \zeta(k) = \frac{1}{k-1}\xi_1(k-1),$$

ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{m=2}^{k-2} \xi_{k-m}(m) + (2^{2-k} + \frac{1}{k-1} - 1)\xi_1(k-1) = 0\,.$$

De la formule précédente et de (4) découle alors directement l'identité suivante :

Proposition 4 (Formule d'Ohno)**.** *Pour $k \geq 4$,*

$$\sum_{m=1}^{k-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) \\ + (2^{2-k} + \frac{2-k}{k-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{k-2}(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(k-2)}) = 0 \quad (5)$$

Exemple 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} = 0\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} - \frac{5}{48}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^2} - \frac{5}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2} = 0\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2}{n^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^3}{n^3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}$$
$$-\frac{59}{1920}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^4}{n^2}-\frac{59}{320}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2H_n^{(2)}}{n^2}-\frac{59}{640}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n^{(2)})^2}{n^2}-\frac{59}{240}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(3)}}{n^2}$$
$$-\frac{59}{320}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^2}=0.$$

Remarque 2. Le nombre de termes intervenant dans la formule (5) est

$$N(k)=\sum_{m=1}^{k-2}p(m)$$

où $p(m)$ est le nombre de partitions de m (cf. [9] 6.2). On a ainsi $N(4)=3, N(5)=6, N(6)=11, N(7)=18$, etc.

Références

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 189-209.

[2] X. Chen and W. Chu, Dixon's $F_2(1)$-series and identities involving harmonic numbers and the Riemann zeta function, *Discrete Math.* **310** (2010), 83-91.

[3] J. Choi and H. M. Srivastava, Explicit evaluation of Euler and related sums, *The Ramanujan J.* **10** (2005), 51-70.

[4] M-A. Coppo and B. Candelpergher, The Arakawa-Kaneko Zeta function,*The Ramanujan J.* **22** (2010), 153-162.

[5] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, (1775), Opera Omnia I-15, 217-267.

[6] P. Flajolet and R. Sedgewick, Mellin Transforms and Asymptotics : finite differences and Rice's integrals, *Theoretical Computer Science* **144** (1995), 101-124.

[7] H. Hasse, Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe, *Mathematische Zeitschrift* **32** (1930), 458-464.

[8] Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values, in Zeta functions, Topology, and Quantum Physics, Dev. Math. **14**, 131-144, Springer, New York, 2005.

[9] E. Zeidler, *Quantum Field Theory I : Basics in Mathematics and Physics*, Springer, Berlin Heidelberg, 2006.