HAL
open science

Formule de Hasse pour zêta et relations entre les sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo

To cite this version:

Marc-Antoine Coppo. Formule de Hasse pour zêta et relations entre les sommes d'Euler. 2011. hal-00499548v7

HAL Id: hal-00499548

https://hal.univ-cotedazur.fr/hal-00499548v7

Preprint submitted on 16 Nov 2011 (v7), last revised 22 Dec 2011 (v9)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formule de Hasse pour zêta et relations entre les sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo
CNRS-INSMI
Université de Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2

Marc-Antoine.COPPO@unice.fr

Article d'exposition
2011

Résumé

Dans cet article, on présente une identité qui étend naturellement la classique formule de Hasse pour la fonction zêta de Riemann à la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko. On montre comment une nouvelle interprétation d'une formule sommatoire d'Ohno permet d'en déduire des relations non triviales entre les sommes d'Euler.

1 Introduction

Il est bien connu (cf. [9] 6.4) que la fonction ζ de Riemann peut être représentée par la transformée de Mellin normalisée

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt \quad \text{pour } \Re(s) > 1.$$

Plus généralement, il est naturel de considérer pour tout entier $k \geq 1$ la fonction ξ_k définie par la représentation

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\, dt \quad \text{pour } \Re(s) > 0\,,$$

avec

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \quad (|z| < 1).$$

On montre par une méthode standard pour les transformées de Mellin normalisées ([9] 6.7) que la fonction ξ_k se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction entière de s. On l'appelle la *fonction zêta d'Arakawa-Kaneko* (cf. [1], [4]). Dans le cas le plus simple $k = 1$, $\xi_1(s)$ n'est autre que $s\zeta(s+1)$.

On montre par des méthodes élémentaires (cf. Proposition 3) que les valeurs prises par la fonction ξ_k sur les entiers positifs admettent l'expression

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

où $P_m(x_1, \ldots, x_m)$ désigne le m-ième polynôme de Bell modifié défini par la fonction génératrice

$$\exp(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{z^k}{k}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x_1, \ldots, x_m)\, z^m\,,$$

et où $H_n = H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}$ sont les nombres harmoniques généralisés

$$H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m}\,.$$

Nous appelons cette identité la *formule de Hasse* pour la fonction ξ_k parce qu'elle prolonge naturellement une formule classique pour les valeurs de ζ dont l'origine remonte à Hasse [1]. Dans le cas particulier $k = m = 1$, on retrouve une célèbre formule d'Euler :

$$\xi_1(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2\zeta(3)\,.$$

L'intérêt principal de cette formule de Hasse est d'engendrer une famille de relations non-triviales entre les *sommes d'Euler* [2]. Il découle en effet d'une formule sommatoire d'Ohno (cf. [8]) la relation

$$\xi_{k-1}(1) + \xi_{k-2}(2) + \cdots + \xi_2(k-2) = (1 - 2^{2-k})\xi_1(k-1) \quad \text{pour } k \geq 4.$$

Combinée avec la formule de Hasse pour ξ_k, cette relation peut alors se traduire par la remarquable identité suivante :

$$\sum_{m=1}^{k-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) \\ + (2^{2-k} + \frac{2-k}{k-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{k-2}(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(k-2)}) = 0 \quad \text{pour } k \geq 4.$$

1. Les polynômes de Bell n'apparaissent pas explicitement dans la formulation originelle de Hasse (cf. [7] formule (5)).

2. La première étude systématique de ces séries faisant intervenir les nombres harmoniques a été entreprise par Euler en 1771 (cf. [5]).

En appliquant la formule précédente dans les cas les plus simples $k = 4$ et $k = 5$, on obtient respectivement les identités

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} = 0,$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} - \frac{5}{48} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^2} - \frac{5}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2} = 0\,.$$

2 Polynômes de Bell évalués sur les nombres harmoniques

Définition 1. Les *polynômes de Bell modifiés* (cf. [2], [4], [6]) sont les polynômes P_m definis pour tout entier naturel m par la fonction génératrice

$$\exp\left(\sum_{k\geq 1} x_k \frac{z^k}{k}\right) = 1 + \sum_{m\geq 1} P_m(x_1, ..., x_m)\, z^m\,. \tag{1}$$

Une expression explicite de P_m est donnée par

$$P_m(x_1, ..., x_m) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\cdots=m} \frac{1}{k_1!k_2!k_3!\ldots} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{k_2} \left(\frac{x_3}{3}\right)^{k_3} \ldots$$

On peut également calculer récursivement les P_m au moyen de la relation $P_0 = 1$ et

$$mP_m(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m} x_k\, P_{m-k}(x_1, \ldots, x_{m-k}) \quad (m \geq 1)\,.$$

Proposition 1. *Pour tout entier naturel m et tout entier $n \geq 1$, on a l'identité*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} \frac{t^m}{m!} dt = \frac{P_m(H_n, \ldots, H_n^{(m)})}{n}\,, \tag{2}$$

avec

$$H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m} \quad \textit{et} \quad H_n = H_n^{(1)}\,.$$

Démonstration. D'une part la classique relation eulérienne (cf. [9])

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,,$$

en substituant $u = e^{-t}$, $x = 1 - z$ et $y = n + 1$, permet d'obtenir

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^n e^{tz} dt = \frac{n!}{(1-z)(2-z)\ldots(n+1-z)}\,.$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)} &= \frac{n!}{(n+1)!} \times \prod_{j=0}^{n}(1-\frac{z}{j+1})^{-1} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \exp(-\sum_{j=0}^{n}\ln(1-\frac{z}{j+1})) \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \exp(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k(j+1)^k}) \\
&= \frac{1}{(n+1)}\exp(\sum_{k=1}^{\infty}H_{n+1}^{(k)}\frac{z^k}{k}) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{P_m(H_{n+1}^{(1)},\dots,H_{n+1}^{(m)})}{n+1}\,z^m \quad \text{(by (1))}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}e^{tz}dt = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{P_m(H_n^{(1)},\dots,H_n^{(m)})}{n}\,z^m\,.$$

La formule (2) en resulte par identification du terme en z^m. □

Exemple 1. Pour les petites valeurs de m, on a ainsi

$$\begin{aligned}
P_1(H_n) &= H_n \\
P_2(H_n, H_n^{(2)}) &= \frac{(H_n)^2}{2} + \frac{H_n^{(2)}}{2} \\
P_3(H_n, H_n^{(2)}, H_n^{(3)}) &= \frac{(H_n)^3}{6} + \frac{H_nH_n^{(2)}}{2} + \frac{H_n^{(3)}}{3} \\
P_4(H_n, H_n^{(2)}, H_n^{(3)}, H_n^{(4)}) &= \frac{(H_n)^4}{24} + \frac{(H_n)^2H_n^{(2)}}{4} + \frac{(H_n^{(2)})^2}{8} + \frac{H_nH_n^{(3)}}{3} + \frac{H_n^{(4)}}{4}\,.
\end{aligned}$$

3 Formule de Hasse pour ξ_k

Proposition 2. *Soit*

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}f(t)\,dt$$

une transformée de Mellin normalisée avec :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1-e^{-t})^{n-1}$$

On suppose que les coefficients a_n vérifient la condition $|a_n| = O(\frac{1}{n})$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1) L'intégrale $F(s)$ converge pour $\Re(s) > 0$.

2) Si m est un entier naturel, alors :

$$F(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})}{n} \tag{3}$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|(1-e^{-t})^{n-1} \leq C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n} = \frac{Ct}{1-e^{-t}}$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale et autorise la permutation des symboles $\int$ et $\sum$. D'où l'expression

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, dt\,.$$

En posant $s = m+1$ dans l'expression précédente, la formule (3) résulte alors de (2). $\square$

On applique à présent la proposition précédente avec $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, c'est à dire à la fonction

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n^k} = \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}\,,$$

on obtient alors immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3 (Formule de Hasse pour ξ_k)**.** *Pour $k \geq 1$ et $\Re(s) > 0$, soit*

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\, dt$$

Pour tout entier naturel m, on a

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})\,. \tag{4}$$

En particulier,

$$\xi_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = \zeta(k+1)\,.$$

Remarque 1. De $\mathrm{Li}_1(z) = -\ln(1-z)$ découlent les égalités

$$\xi_1(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} (\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}) t\, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^s \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt = s\zeta(s+1)\,.$$

D'où, pour $k \geq 2$,

$$\xi_1(k-1) = (k-1)\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{k-2}(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(k-2)})\,.$$

Exemple 2 (Formule d'Euler)**.**

$$\xi_1(2) = 2\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2}.$$

Plus généralement, pour $k \geq 2$,

$$\xi_k(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{k+1}} = \frac{1}{2}(k+3)\zeta(k+2) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \zeta(j+1)\zeta(k+1-j) \quad \text{(cf. [5], [3])}$$

4 Relation entre les sommes d'Euler

La *formule sommatoire d'Ohno* (cf. [8] Proposition 2) peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\sum_{m=1}^{k-2} \xi_{k-m}(m) = (1 - 2^{2-k})\xi_1(k-1).$$

Comme

$$\xi_{k-1}(1) = \zeta(k) = \frac{1}{k-1}\xi_1(k-1),$$

ceci peut encore s'écrire

$$\sum_{m=2}^{k-2} \xi_{k-m}(m) + (2^{2-k} + \frac{1}{k-1} - 1)\xi_1(k-1) = 0\,.$$

De la formule précédente et de (4) découle alors directement l'identité suivante :

Proposition 4 (Formule d'Ohno)**.** *Pour $k \geq 4$,*

$$\sum_{m=1}^{k-3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) + (2^{2-k} + \frac{2-k}{k-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{k-2}(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(k-2)}) = 0 \quad (5)$$

Exemple 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} = 0\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} - \frac{5}{48}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^2} - \frac{5}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2} = 0\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2}{n^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}+\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^3}{n^3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}$$
$$-\frac{59}{1920}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^4}{n^2}-\frac{59}{320}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n)^2H_n^{(2)}}{n^2}-\frac{59}{640}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(H_n^{(2)})^2}{n^2}-\frac{59}{240}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(3)}}{n^2}$$
$$-\frac{59}{320}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^2}=0.$$

Remarque 2. Le nombre de termes intervenant dans la formule (5) est

$$N(k)=\sum_{m=1}^{k-2}p(m)$$

où $p(m)$ est le nombre de partitions de m (cf. [9] 6.2). On a ainsi $N(4)=3, N(5)=6, N(6)=11, N(7)=18$, etc.

Références

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 189-209.

[2] X. Chen and W. Chu, Dixon's $F_2(1)$-series and identities involving harmonic numbers and the Riemann zeta function, *Discrete Math.* **310** (2010), 83-91.

[3] J. Choi and H. M. Srivastava, Explicit evaluation of Euler and related sums, *The Ramanujan J.* **10** (2005), 51-70.

[4] M-A. Coppo and B. Candelpergher, The Arakawa-Kaneko Zeta function, *The Ramanujan J.* **22** (2010), 153-162.

[5] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, (1775), Opera Omnia I-15, 217-267.

[6] P. Flajolet and R. Sedgewick, Mellin Transforms and Asymptotics : finite differences and Rice's integrals, *Theoretical Computer Science* **144** (1995), 101-124.

[7] H. Hasse, Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe, *Mathematische Zeitschrift* **32** (1930), 458-464.

[8] Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values, in Zeta functions, Topology, and Quantum Physics, Dev. Math. **14**, 131-144, Springer, New York, 2005.

[9] E. Zeidler, *Quantum Field Theory I : Basics in Mathematics and Physics*, Springer, Berlin Heidelberg, 2006.