Formule de Hasse étendue et relations entre les sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo

Formule de Hasse étendue et relations entre les sommes d'Euler

Marc-Antoine Coppo
Université Nice-Sophia Antipolis
Laboratoire J.A. Dieudonné
Parc Valrose
F-06108 Nice Cedex 2

Marc-Antoine.COPPO@unice.fr

2010

Résumé

Dans cet article, on expose une identité qui étend naturellement la formule de Hasse pour les valeurs de zêta. La réécriture d'une remarquable formule sommatoire d'Ohno permet alors de générer une vaste classe de relations entre les sommes d'Euler.

Absract

In this article, we expose an identity which naturally extends the Hasse formula for the zeta values. The rewriting of a deep formula of Ohno enables to generate a vast class of relations between Euler sums.

Mathematical Subject Classification (2000) : 11-02, 11M06, 11M41.

1 Introduction

On sait depuis la seconde moitié du dix-neuvième siècle que la fonction ζ de Riemann peut être représentée par la transformée de Mellin normalisée

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt \quad \text{pour } \Re(s) > 1.$$

Plus généralement, on peut considérer la fonction ξ_k définie pour $k \geq 1$ par

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \mathrm{Li}_k(1-e^{-t})\, dt\,,$$

où Li_k désigne le k-ième polylogarithme $\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}$, qui est apparue pour la première fois dans [1]. L'intégrale converge pour $\Re(s) > 0$ et la fonction ξ_k se prolonge analytiquement dans le plan complexe en une fonction entière de s. Les valeurs de ξ_k ont des relations étroites avec les valeurs de ζ sur les entiers positifs : ainsi, on a $\xi_1(q) = q\zeta(q+1)$ et $\xi_q(1) = \zeta(q+1)$. Plus profondément, Ohno a démontré dans [7] la remarquable identité sommatoire suivante

$$\sum_{m=1}^{q-1} \xi_{q-m}(m) = 2(q-1)(1-2^{1-q})\zeta(q)$$

que nous appellerons dans la suite *formule d'Ohno*.

On montre dans cet article que les valeurs de ξ_k aux entiers positifs peuvent s'exprimer sous la forme suivante

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}),$$

où $P_m(x_1, \ldots, x_m)$ désigne le m-ième polynôme de Bell modifié (cf. [5]) défini par la fonction génératrice

$$\exp(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{z^k}{k}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x_1, \ldots, x_m)\, z^m,$$

et où $H_n, H_n^{(2)}, \cdots, H_n^{(m)}$ sont les nombres harmoniques. Nous appelons cette identité la *formule de Hasse étendue* parce qu'elle prolonge naturellement une représentation déjà connue pour les valeurs de ζ dont l'origine remonte à Hasse (cf. [3], [6]). L'intérêt de cette expression de $\xi_k(m)$ est de permettre une réécriture de la formule d'Ohno sous la forme suivante

$$\sum_{m=1}^{q-3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) = (1 - \frac{1}{q-1} - \frac{1}{2^{q-2}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{q-2}(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(q-2)}),$$

ce qui génère une intéressante famille de relations entre les *sommes d'Euler* (cf. [2]). En appliquant cette formule dans les cas les plus simples (*i.e.* $q = 4$ et $q = 5$), on obtient en particulier les relations suivantes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} - \frac{5}{48} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^2} - \frac{5}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{5}{24} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2} = 0.$$

Par ailleurs, en utilisant une formule de Dilcher (cf. [4]), on montre que

$$P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_m}$$

ce qui permet notamment de retrouver une autre expression de $\xi_k(m+1)$ donnée dans [7].

2 Valeurs de la fonction ξ_k

Théorème 1. *Soit*

$$F(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) t^{s-1}\, dt$$

une transformée de Mellin normalisée avec :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - e^{-t})^{n-1}$$

où on suppose que les coefficients a_n vérifient la condition $|a_n| = O(\frac{1}{n})$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

1) L'intégrale $F(s)$ converge pour $\Re(s) > 0$.

2) Si m est un entier naturel et $s = m+1$, alors :

$$F(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})}{n} \tag{1}$$

où $P_m(x_1, \cdots, x_m)$ désigne le m-ème polynôme de Bell modifié défini par la fonction génératrice :

$$\exp(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{z^k}{k}) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x_1, \ldots, x_m)\, z^m$$

et où $H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m}$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| (1 - e^{-t})^{n-1} \leq C \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(1 - e^{-t})^{n-1}}{n} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-t})^{n-1}}{n} = \frac{Ct}{1 - e^{-t}}$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale et autorise la permutation de $\int$ et $\sum$:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, dt\, .$$

La formule (1) résulte alors du lemme qui suit. □

Lemme 1.
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\frac{t^m}{m!}dt = \frac{P_m(H_n,\dots,H_n^{(m)})}{n} \tag{2}$$

Démonstration. Pour $a>0$ et $b>0$, on part de la classique relation d'Euler (cf. [8])
$$\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,.$$
En posant : $u=e^{-t}$, $a=1-z$ et $b=n+1$, on obtient :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^n e^{tz}dt=\frac{n!}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)}\,.$$
D'autre part, on a aussi
$$\begin{aligned}\frac{n!}{(1-z)(2-z)\dots(n+1-z)} &= \frac{n!}{(n+1)!}\times\prod_{j=0}^{n}(1-\frac{z}{j+1})^{-1}\\ &= \frac{1}{(n+1)}\times\exp(-\sum_{j=0}^{n}\log(1-\frac{z}{j+1}))\\ &= \frac{1}{(n+1)}\times\exp(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k(j+1)^k})\\ &= \frac{1}{(n+1)}\exp(\sum_{k=1}^{\infty}H_{n+1}^{(k)}\frac{z^k}{k})\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{P_m(H_{n+1}^{(1)},\dots,H_{n+1}^{(m)})}{n+1}z^m\,.\end{aligned}$$
La formule (2) en résulte par identification du terme en z^m. □

Exemple 1.
$$P_1(H_n)=H_n\,,\ P_2(H_n,H_n^{(2)})=\frac{(H_n)^2}{2}+\frac{H_n^{(2)}}{2}\,,$$
$$P_3(H_n,H_n^{(2)},H_n^{(3)})=\frac{(H_n)^3}{6}+\frac{H_nH_n^{(2)}}{2}+\frac{H_n^{(3)}}{3}\,,$$
$$P_4(H_n,H_n^{(2)},H_n^{(3)},H_n^{(4)})=\frac{(H_n)^4}{24}+\frac{(H_n)^2H_n^{(2)}}{4}+\frac{(H_n^{(2)})^2}{8}+\frac{H_nH_n^{(3)}}{3}+\frac{H_n^{(4)}}{4}\,.$$

En appliquant le théorème précédent avec $a_n=\dfrac{1}{n^k}$, c'est à dire pour la fonction :
$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-e^{-t})^{n-1}}{n^k}=\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}\,,$$
on obtient alors immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit k un entier ≥ 1. L'intégrale :*

$$\xi_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} t^{s-1}\, dt$$

converge pour $\Re(s) > 0$. On a :

$$\xi_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, dt\,.$$

En particulier, si m est un entier naturel et $s = m+1$, alors :

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) \quad \textit{avec} \quad H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m}\,. \tag{3}$$

Remarque 1. Pour $k = 1$, on a $\mathrm{Li}_1(1-e^{-t}) = t$. Il en résulte que :

$$\xi_1(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{t}{1-e^{-t}}) \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, dt = s\zeta(s+1)\,.$$

Dans ce cas, l'identité (3) n'est pas autre chose que la représentation des valeurs de la fonction zêta connue sous le nom de *formule de Hasse* pour ζ (cf. [3], [6]) :

$$(q-1)\zeta(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{q-2}(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(q-2)})\,.$$

Par exemple, pour $q = 3$, on retrouve la célèbre formule d'Euler (cf. [2]) :

$$2\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2}\,.$$

Exemple 2. Pour $q \geq 2$,

$$\xi_{q-1}(1) = \zeta(q)\,,$$

$$\xi_{q-1}(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^q} = \frac{1}{2}(q+2)\zeta(q+1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q-2} \zeta(j+1)\zeta(q-j) \quad \text{(cf. [2], [8])}\,,$$

$$\xi_{q-1}(3) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^q} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^q}\,,$$

$$\xi_{q-1}(4) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^q} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^q} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^q}\,,$$

$$\xi_{q-1}(5) =$$

$$\frac{1}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^4}{n^q} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2 H_n^{(2)}}{n^q} + \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n^{(2)})^2}{n^q} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(3)}}{n^q} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^q}\,.$$

3 Application aux sommes d'Euler

En réécrivant à présent la *formule d'Ohno* (cf. [7] Proposition 2) :

$$\sum_{m=1}^{q-1} \xi_{q-m}(m) = 2(q-1)(1-2^{1-q})\zeta(q)$$

grâce à la formule de Hasse étendue (3) précédente, et en prenant en compte le fait que $\xi_1(q-1)+\xi_{q-1}(1) = q\zeta(q)$, on obtient alors la formule suivante qui génère une famille de relations entre les sommes d'Euler :

Corollaire 2. *Pour $q \geq 4$ et $m \geq 1$,*

$$\sum_{m=1}^{q-3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-m}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})$$
$$= (1 - \frac{1}{q-1} - \frac{1}{2^{q-2}}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_{q-2}(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(q-2)})\,. \quad (4)$$

Exemple 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^2} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} = 0\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} - \frac{5}{48}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^2} - \frac{5}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{5}{24}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2} = 0\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^5} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2}{n^4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^4} + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^3}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^3} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^3}$$
$$- \frac{59}{1920}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^4}{n^2} - \frac{59}{320}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n)^2 H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{59}{640}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n^{(2)})^2}{n^2} - \frac{59}{240}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(3)}}{n^2}$$
$$- \frac{59}{320}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^3} = 0.$$

Remarque 2. En développant $(1-e^{-t})^{n-1}$ par la formule du binôme dans (2), on obtient l'identité suivante

$$P_m(H_n, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{k^m}.$$

Par ailleurs, d'après la formule de Dilcher (cf. [4] Corollaire 3), on a aussi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{k^m} = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_m}\,,$$

d'où, par transitivité,

$$P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)}) = \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_m}\,. \tag{5}$$

Cette réécriture de la formule de Dilcher permet notamment de retrouver la représentation de $\xi_k(m+1)$ donnée dans [7] :

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)}) = \sum_{n \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n^{k+1} n_1 n_2 \dots n_m}\,.$$

4 Appendice

Dans cet appendice, on montre, en s'inspirant de [8], que la formule (5) est en fait un cas particulier d'une formule plus générale. Pour cela, on considère un produit infini convergent

$$Q(z) = \prod_{n \geq 1} (1 - a_n z)\,.$$

L'inverse de ce produit peut se développer en

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{\prod_{n\geq 1}(1 - a_n z)} = \prod_{n \geq 1} (1 + a_n z + a_n^2 z^2 + \dots) = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n_1 \leq \dots \leq n_m} a_{n_1} \dots a_{n_m} \right) z^m\,. \tag{6}$$

Par ailleurs, on a $\log(Q(z)) = \sum_{n \geq 1} \log(1 - a_n z)$. D'où

$$\partial \log(Q(z)) = \sum_{n \geq 1} \frac{-a_n}{1 - a_n z} = -\sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} a_n^{k+1} z^k = -\sum_{k \geq 0} z^k \sum_{n \geq 1} a_n^{k+1}\,.$$

Par conséquent,

$$-\log(Q(z)) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^{k+1}}{k+1} \sum_{n \geq 1} a_n^{k+1} = \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} a_n^k \frac{z^k}{k}\,.$$

En posant $S_k = \sum_{n \geq 1} a_n^k$, on en déduit que

$$\frac{1}{Q(z)} = \exp\Big(\sum_{k \geq 1} S_k \frac{z^k}{k}\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(S_1, \dots, S_m)\, z^m\,.$$

Par identification du terme en z^m dans (6), on obtient alors la formule générale :

$$\sum_{n_1 \leq \dots \leq n_m} a_{n_1} \dots a_{n_m} = P_m(S_1, \dots, S_m)\,. \tag{7}$$

Exemple 4. En posant, $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour $1 \le n \le N$ et $a_n = 0$ pour $n > N$, on a alors

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{N}(1 - \frac{z}{n}) \text{ et } \frac{1}{Q(z)} = \frac{N!}{(1-z)(2-z)\dots(N-z)} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(H_N, \dots, H_N^{(m)})\, z^m\,.$$

Ainsi, par (7), on retrouve directement la formule (5).

Exemple 5. En posant $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, on a dans ce cas

$$Q(z^2) = \prod_{n\ge 1}(1 - \frac{z^2}{n^2}) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}\,,$$

et

$$\frac{1}{Q(z^2)} = \frac{\pi z}{\sin \pi z} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2(1 - 2^{1-2m})\zeta(2m) z^{2m}\,.$$

D'où, par identification du terme en z^m, on déduit de (7) la relation

$$\sum_{n_1 \le \dots \le n_m} \frac{1}{n_1^2 \dots n_m^2} = P_m(\zeta(2), \zeta(4), \dots, \zeta(2m)) = 2(1 - 2^{1-2m})\zeta(2m)\,. \qquad (8)$$

Références

[1] T. Arakawa, M. Kaneko, Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 189-209.

[2] J. Choi, H. M. Srivastava Explicit evaluation of Euler and related sums, *The Ramanujan J.* **10** (2005), 51-70.

[3] M-A. Coppo, Nouvelles expressions des formules de Hasse et de Hermite pour la fonction zêta d'Hurwitz, *Expositiones Math.* **27** (2009), 79-86.

[4] K. Dilcher, Some q-series identities related to divisors functions, *Discrete Math.* **145** (1995), 83-93.

[5] P. Flajolet and R. Sedgewick, Mellin Transforms and Asymptotics : Finite differences and Rice's integrals, *Theoretical Computer Science* **144** (1995), 101-124.

[6] H. Hasse, Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche ζ-Reihe, *Mathematische Zeitschrift* **32** (1930), 458-464.

[7] Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values, in Zeta functions, Topology, and Quantum Physics, Dev. Math. **14**, 131-144, Springer, New York, 2005.

[8] V. S. Varadarajan, *Euler through time. A new look at old themes*, American Mathematical Society, 2006.